

УДК 622.23.01: 622.83

Жабко Андрей Викторович

кандидат технических наук,
доцент кафедры маркшейдерского дела,
Уральский государственный
горный университет,
620144 г. Екатеринбург, ул. Куйбышева, 30
e-mail: zhabkoav@mail.ru

**КРИТЕРИЙ РАЗРУШЕНИЯ
ТВЕРДЫХ ТЕЛ***Аннотация:*

На основании ранее выполненных автором исследований в работе предлагается критерий разрушения твердых тел (горных пород). Излагаются методологические основы его получения с краткими теоретическими выкладками. Производится его анализ и интерпретация получаемых результатов. Анализируется значение угла наклона наиболее опасной площадки среза в предельном равновесии для различного уровня напряженного состояния. Показывается, что значение данного угла не является постоянной величиной, а зависит от значений предельных компонент главных напряжений. Рассматриваются частные случаи предлагаемого критерия для идеально сыпучих и идеально связных сред. Указывается на принципиальное отличие критериев Кулона и Мора. Указывается на преимущества предлагаемого критерия перед известным аналогом при его использовании в качестве поверхности текучести (пластического потенциала). Дана физическая интерпретация явления дилатансии при разрушении твердых тел.

Ключевые слова: критерий разрушения, условия равновесия, дифференциальное уравнение, главные напряжения, угол наклона площадки скольжения, критерий Кулона, критерий Мора, ассоциированный закон пластического течения, коэффициент дилатансии, пластическое деформирование.

Zhabko Andrew V.

candidate of technical sciences,
associate professor, mine surveying chair
the Ural State Mining University
620144 Yekaterinburg, Kuibishev st., 30
e-mail: zhabkoav@mail.ru

**THE CRITERION OF HARD ROCKS
DESTRUCTION***Abstract:*

In terms of earlier performed researches the criterion of hard rocks' destruction is proposed. Methodological foundations of its obtaining with brief theoretical calculations are set forth. Its analysis and the results interpretation are performed. The slope angle value of the most dangerous area in the cut-off limit equilibrium for different levels of stressed state is analyzed. It is shown that this angle's value is not constant one, it depends on the values of limiting components of principal stresses. Particular cases of the proposed criterion both for perfectly granular and perfectly coherent medium are reviewed. Fundamental difference of the Mohr and Coulomb criteria is pointed to. The proposed criterion advantages to known analogue when it is used as the yield surface (plastic potential) are indicated. Physical interpretation of the dilatancy phenomenon is given.

Key words: criterion of destruction, equilibrium conditions, differential equation, principal stresses, slope angle of slide ground, Coulomb criterion, Mohr criterion, associated law of plastic flow, dilatancy coefficient, plastic deformation.

В работе [1] автором получен критерий разрушения горных пород, имеющий следующий вид:

$$\sigma_3 = \sigma_1 - 2C \sqrt{1 + \frac{\operatorname{tg} \varphi \sigma_1}{C}}, \quad (1)$$

где σ_3 , σ_1 – главные напряжения; C – сцепление; φ – угол внутреннего трения.

Критерий (1) получен при решении следующей геомеханической задачи. Рассмотрим полупространство (толщу земной коры). Разобьем его вертикальным сечением на две части, отбросим одну из них, заменяя ее действие по глубине эпюрой распределения горизонтальных главных напряжений σ_3 (рис. 1). Таким образом, определение пластической (жесткопластической) составляющей компоненты горизонтальных напряжений сводится к определению этой эпюры, то есть определению закона распределения нормальных напряжений с глубиной. Для определения эпюры распределения напряжений

необходимо знать положение и форму поверхности скольжения, по которой будет разрушен массив, а также располагать условием равновесия породной призмы. С упомянутыми уравнениями и методикой определения напряжений можно ознакомиться в работах [1 – 3]. Потенциальные поверхности скольжения для рассматриваемой задачи и различных глубин приведены на рис. 1.

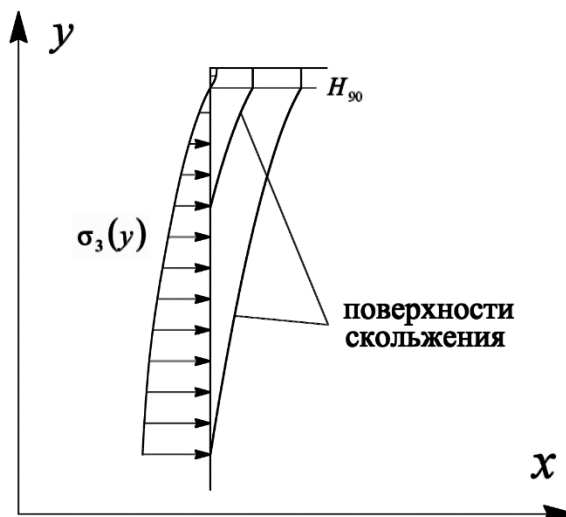


Рис. 1 – Расчетная схема к определению эпюры горизонтальных напряжений с глубиной

Перейдем к анализу выражения (1). Его можно представить в следующем виде:

$$\sigma_3 = \sigma_1 - 2\text{ctg}\psi, \quad (2)$$

где ψ – угол наклона наиболее опасной площадки скольжения к направлению действия главного напряжения σ_3 .

Если $\sigma_3 = 0$ (одноосное сжатие), то $\psi = \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}$, а $\sigma_1 = \sigma_{\text{сж}}$ ($\sigma_{\text{сж}}$ – предел прочности на одноосное сжатие). При увеличении σ_3 (сжимающие напряжения считаются положительными) угол наклона критической площадки также увеличивается. Если выполняется условие $\sigma_p < \sigma_3 < 0$ (σ_p – предел прочности на одноосное растяжение), то $\psi < \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}$. В случае, если материал имеет пластический характер разрушения, то есть $\varphi = 0$, угол наклона критической площадки среза является постоянной величиной, не зависящей от уровня напряжений, и равен $\psi = 45^\circ$. А критерий (1, 2) принимает следующий вид:

$$\sigma_1 - \sigma_3 = 2C. \quad (3)$$

Выражение (3) есть не что иное, как известный критерий разрушения Треска (Сен-Венана), (1868) [4].

Для идеально сыпучих материалов ($C = 0$) критерий прочности таков (в рамках данной работы приводится без доказательства):

$$\sigma_1 = (1 + \sin \varphi) \sigma_3. \quad (4)$$

Формула (4) выражает линейную связь между главными напряжениями. Таким образом, при отсутствии как трения, так и сцепления критерий прочности имеет линей-

ный вид. Как известно, идеальная жидкость не обладает внутренним трением (вязкостью) и прочностью на разрыв, а соответственно, и сцеплением. Если положить в уравнении (3) $C = 0$ или в уравнении (4) $\varphi = 0$, получим условие равновесия (прочности) в виде гидростатического поля распределения напряжений: $\sigma_1 = \sigma_3$.

Из выражения (1) также следует, что для высокого уровня напряжений предельные компоненты главных напряжений равны, то есть условие предельного равновесия обеспечивается гидростатическим полем распределения напряжений:

$$\lim_{\sigma_1 \rightarrow \infty} \frac{\sigma_3}{\sigma_1} = 1. \quad (5)$$

Из выражений (4) и (5) следует, что для несвязных материалов и материалов, обладающих сцеплением, но находящихся в условиях высоких напряжений, условия предельного равновесия совпадают. Другими словами, можно говорить о том, что на больших глубинах породы проявляют свойства жидкости.

Очевидно, что напряжение σ_1 в критерии (1) не может быть отрицательным, поэтому, положив $\sigma_1 = 0$, получим $\sigma_3 = -2C$, то есть предел прочности на растяжение по модулю не может превышать двойного сцепления ($|\sigma_p| < 2C$). Таким образом, для несвязных материалов $|\sigma_p| = 0$.

Заметим, что при выводе условия (1) использовался линейный критерий Кулона, (1776) [4]:

$$\tau = \sigma_n \operatorname{tg} \varphi + C, \quad (6)$$

где τ, σ_n – предельные касательные и нормальные напряжения на площадке среза, соответственно.

Уравнение (6) в литературе часто называют критерием Кулона – Мора, Мора – Кулона или просто Мора. В 1900 г. Мор предложил общую форму критерия прочности, связывающую главные нормальные напряжения, однако конкретную функциональную зависимость он не предлагал. В дальнейшем было предложено построение паспорта прочности в виде огибающей предельных кругов Мора. Отметим, что в случае криволинейной огибающей угол наклона критической площадки среза к линиям действия главных напряжений будет меняться, что противоречит существующей теории.

Однако заметим очень важное различие между критериями Кулона и Мора. Критерий Кулона в форме (6) был получен чисто эмпирически, и в нем совершенно ничего не говорится о главных напряжениях. Критерий Мора выражает предельное соотношение только через главные напряжения, и в нем ничего не говорится о напряжениях на площадке среза. Паспорт прочности по Кулону может быть непосредственно получен по результатам испытаний на прямой срез. Для получения паспорта прочности в осях главных напряжений по Мору необходимо произвести трехосные (объемные) испытания.

Для получения отображения паспорта прочности в осях главных напряжений из системы напряжений на площадке среза (и наоборот), то есть связи критериев Кулона и Мора, необходимо располагать условиями передачи внешней нагрузки (главных напряжений) на площадку среза, что на современном этапе развития экспериментальной базы невозможно. Тем не менее критерий (6) в осях главных напряжений некоторые авторы, например [5], представляют в виде:

$$\sigma_1 = \sigma_{сж} + \frac{1 + \sin \varphi}{1 - \sin \varphi} \sigma_3. \quad (7)$$

Между критериями (1) и (7) существуют два принципиальных отличия. Во-первых, в критерии разрушения (7) угол наклона наиболее опасной площадки скольжения к

линии действия главного напряжения σ_3 является величиной постоянной $\psi = \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}$.

Данный угол обеспечивает максимальную разницу между сдвигающими и удерживающими силами по площадке среза в окрестности конкретной точки при заданном уровне напряжений. В критерии (1) угол наклона критической площадки является величиной переменной, зависящей от уровня напряжений, это и придает критерию прочности кривизну. Кроме того, значение угла наклона критической площадки определяется из условия максимума разности сдвигающих и удерживающих сил вдоль всей поверхности разрушения на возможном перемещении всей механической системы (призмы смещения). Во-вторых, минимальное главное напряжение σ_3 не совершает работу на площадке сдвига, то есть не реализует удерживающего эффекта в виде трения. И действительно, если подставить критерий разрушения (1) в систему уравнений (8), то получим критерий Кулона в виде равенства (6):

$$\begin{aligned}\sigma_n &= \sigma_1 \cos^2 \psi; \\ \tau &= \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3) \sin 2\psi.\end{aligned}\quad (8)$$

Фактически критерий (1) получен моделированием разрушения твердого тела в изменяющемся поле главных напряжений, и в этой связи он имеет некоторое методологическое сходство с микродефектными теориями прочности.

Если линеаризовать уравнение (1) в окрестности точек ($\sigma_1 = \sigma_{сж}$; $\sigma_3 = 0$), то критерий разрушения примет вид:

$$\sigma_1 = \sigma_{сж} + (1 + \sin \varphi) \sigma_3. \quad (9)$$

Линеаризация критерия (1) эквивалентна замене криволинейной поверхности скольжения на прямолинейную с углом падения площадки среза $\psi = \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}$ при тех же механических характеристиках. Анализируя выражения (7) и (9), констатируем их качественное сходство, а при $\varphi = 0$ они совпадают.

Известно, что пластическое деформирование у хрупких материалов ($\varphi \neq 0$) сопровождается увеличением их объема (дилатансией). Вопрос об увеличении объема при пластическом деформировании удобнее рассматривать в осях, совпадающих с направлением действия главных напряжений. Если принять ассоциированный закон пластического течения (принцип нормальности), то приращение пластических деформаций будет нормальным к поверхности текучести (пластического потенциала). На рис. 2 представлены критерии (1), (7) и (9), а также вектора приращений пластических деформаций в случае принятия ассоциированного закона пластического течения.

Для оценки объемных изменений при пластическом деформировании используется так называемый коэффициент дилатансии, представляющий собой котангенс угла наклона паспорта прочности β (при ассоциированном законе пластического течения) к оси σ_1 (см. рис. 2). Значение коэффициента дилатансии определяется выражением [5]:

$$\operatorname{ctg} \beta = \left| \frac{d\varepsilon_3^p}{d\varepsilon_1^p} \right|, \quad (10)$$

где $\operatorname{ctg} \beta$ – коэффициент дилатансии; $d\varepsilon_1^p$, $d\varepsilon_3^p$ – приращения пластических деформаций по направлениям главных осей.

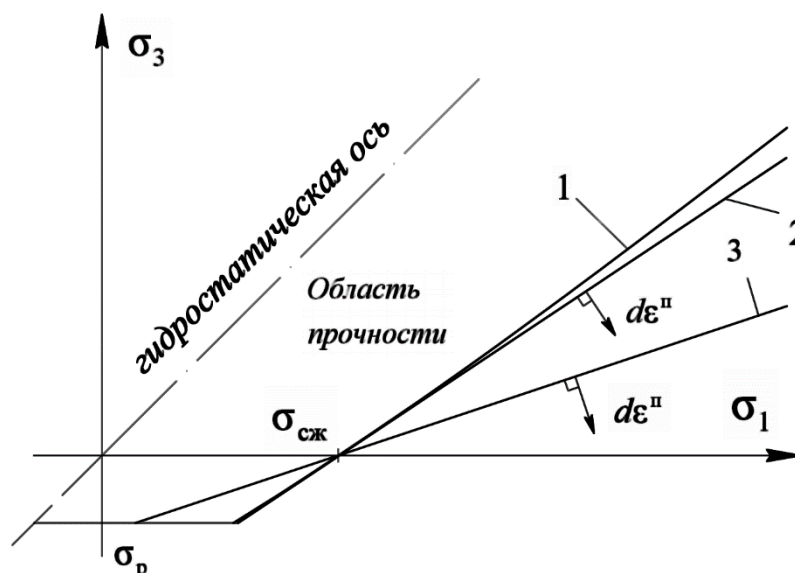


Рис. 2 – Критерии прочности (пластичности):

$$1 - \sigma_3 = \sigma_1 - 2C \sqrt{1 + \frac{\operatorname{tg} \varphi \sigma_1}{C}}; \quad 2 - \sigma_1 = \sigma_{cj} + [1 + \sin \varphi] \sigma_3; \quad 3 - \sigma_1 = \sigma_{cj} + \frac{1 + \sin \varphi}{1 - \sin \varphi} \sigma_3$$

В случае, когда коэффициент дилатансии равен единице, пластическое течение называется эквиволуминальным (равнообъемным). Такое деформирование характерно для материалов пластического разрушения.

Приращения пластических деформаций определяется по формулам [4]:

$$d\epsilon_1^p = \lambda \frac{\partial Q}{\partial \sigma_1}; \quad d\epsilon_3^p = \lambda \frac{\partial Q}{\partial \sigma_3}, \quad (11)$$

где λ – постоянная; Q – функция пластического потенциала (условие пластичности или прочности (1, 7, 9) с нулем в правой части).

Согласно уравнениям (10, 11), коэффициент дилатансии для поверхности текучести в виде (7) равен

$$\operatorname{ctg} \beta = \frac{1 + \sin \varphi}{1 - \sin \varphi}. \quad (12)$$

Коэффициент дилатансии для линеаризованного критерия (9) равен

$$\operatorname{ctg} \beta = 1 + \sin \varphi. \quad (13)$$

Увеличение объема при пластическом деформировании, согласно (12), дает завышенную величину, что противоречит экспериментальным данным [6]. Для устранения данного несоответствия прибегают к искусственному уменьшению приращения объема пластических деформаций посредством необоснованной замены угла внутреннего трения в критерии (7) так называемым углом дилатансии i или его максимальным значением i_0 при отсутствии нормального напряжения на площадке среза (при разрушении трещины i_0 будет стремиться к углу подъема неровностей контактирующих поверхностей). В общем случае, величина дилатансии является производной $d\delta_n/d\delta_s$ (где δ_n, δ_s – величины нормального и касательного сдвига, соответственно). Лейхтниц и Ербан получили максимальное значение угла дилатансии на трещине в пределах $10-20^\circ$ [6]. Подобным образом переходят к неассоциированному закону пластического течения.

Для неассоциированного закона пластического течения в нашем случае, то есть для соответствия критериев (7) и (9), а также равенства коэффициентов дилатансии (12)

и (13) при углах внутреннего трения 35, 30, 20° углы дилатансии должны быть приняты равными 12,8, 11,5, 8,4°, соответственно.

Выше указывалось на отсутствие реализации механизма трения на площадке среза от действия минимального главного напряжения, что обосновано аналитически, однако физические предпосылки данного феномена объяснить достаточно сложно.

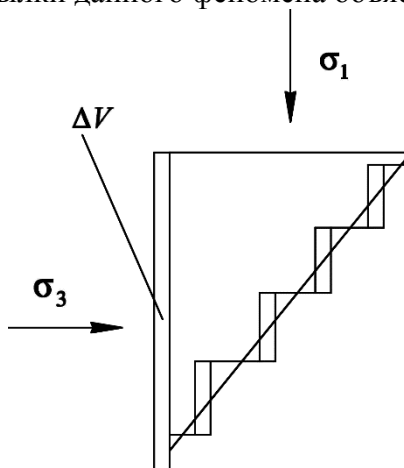


Рис. 3 – Схема пластического деформирования и разрушения образца

Можно предположить, что его сущность заключается в принципиальном отличии упругого и пластического деформирования, а именно в дилатансии. Как при упругом, так и при пластическом деформировании в направлении максимального главного сжимающего напряжения происходит уменьшение размера образца, а в направлении минимального – расширение. При упругом деформировании не происходит увеличения объема (явление дилатансии не наблюдается), и поэтому деформирование происходит в “естественной упаковке” с полным контактом между зернами образца. В случае пластического деформирования происходит разуплотнение зерен, и поэтому в направлении расширения (увеличения объема ΔV), по-видимому, теряется контакт (рис. 3), что и объясняет отсутствие проявления механизма трения в предельном равновесии от действия минимального главного напряжения.

Литература

1. Жабко А.В. Напряженное состояние земной коры / А.В. Жабко // Известия Уральского государственного горного университета. – 2014. – № 3 (35). – С. 57 - 60.
2. Zhabko A.V. Calculation theory of stability of foundations and slopes // Proceedings XV International ISM Congress 2013. 16 – 20 September 2013, Aachen, Germany. - P. 85 – 97.
3. Жабко А.В. Основы общей теории расчета устойчивости откосов / А.В. Жабко // Известия Уральского государственного горного университета. – 2013. – № 4 (32). – С. 47 – 58.
4. Фадеев А.Б. Метод конечных элементов в геомеханике / А.Б. Фадеев. – М.: Недра, 1987. – 221 с.
5. Прочность и деформируемость горных пород / Ю.М. Карташов и др. – М.: Недра, 1979. – 269 с.
6. Кашников Ю.А. Механика горных пород при разработке месторождений углеводородного сырья / Ю.А. Кашников, С.Г. Ашихмин. – М.: ООО «Недра-Бизнесцентр», 2007. – 467 с.