

УДК 621.85.01

Лубенец Николай Алексеевич

кандидат технических наук,
доцент кафедры транспортных системы
и технологии,
Національний гірничий університет,
Украина, 49000, г. Днепропетровск,
пр. Карла Маркса, 19
e-mail: lubenets_ tatyana@ukr.net

Лубенец Татьяна Николаевна

аспирант кафедры транспортных системы
и технологии,
Національний гірничий університет
e-mail: lubenets_ tatyana@ukr.net

**ОБЩИЙ ЗАКОН О ТРЕНИИ ТЕЛ
В РЕАЛИЗАЦИИ СИЛЫ ТЯГИ
ТРАНСПОРТНЫМИ МАШИНАМИ
С ГИБКИМ ТЯГОВЫМ ОРГАНОМ***Аннотация:*

Установлено, что скольжение гибкого тела по неподвижному блоку в обобщенном виде представляется общепризнанными факторами трения твердых тел: суммарной силой трения, ее молекулярной составляющей и нормальной реакцией между телами, которые линейно связаны между собой с помощью коэффициента трения.

Ключевые слова: трение, гибкое тело, натяжение, сила трения, нормальная реакция, коэффициент трения

DOI: 10.18454/2313-1586.2017.01.165

Lubenets Nick A.

candidate of technical sciences,
associate professor,
Transport systems and technologies department,
National Mining University,
the Ukraine, 49000, Dnepropetrovsk,
19 Karl Marx, st.
e-mail: lubenets_ tatyana@ukr.net.

Lubenetz Tatyana N.

post-graduate student
of Transport systems and technologies department
National Mining University
e-mail: lubenetz_ tatyana@ukr.net

**GENERAL LAW ON FRICTION
IN REALIZATION THRUST FORCE
BY TRANSPORT MACHINES
WITH FLEXIBLE THRUST ELEMENT***Abstract:*

It is determined that the flexible body sliding on fixed block is represented in a generalized form by friction solids factors that is by total friction force, its molecular component and normal reaction between the bodies that are linearly linked together via friction coefficient.

Key words: friction, flexible body, tension, the friction force, normal reaction, the coefficient of friction

Общие законы, открытие которых является задачей науки, лежат в основе развития нашей цивилизации. Законы дают представление о явлениях окружающего мира. Они обуславливают уровень образования специалистов и качество научных исследований, способствуют развитию техники, созданию и эксплуатации машин, совершенствованию технологии производства и повышению его эффективности.

В настоящее время на горных предприятиях для транспортирования основных и вспомогательных грузов широкое применение нашли стационарные машины с гибким тяговым органом. К указанным машинам относятся ленточные конвейеры, шахтные напочвенные дороги и некоторые подъемные машины, подвесные дороги и др.

Проектирование и эффективная эксплуатация указанных машин невозможна без определения их тяговой способности и обоснования режимов эксплуатации. Рациональные режимы эксплуатации машин способствуют экономии электроэнергии, повышению ресурса работы гибких тяговых органов, уменьшению себестоимости транспортирования, увеличению производительности и безопасности их работы.

Тяговая способность машин реализуется трением гибкого тягового органа о приводной блок за счет его прижатия под действием усилий натяжения. Тяговые расчеты машин осуществляются с запасом по одному из усилий натяжения гибкого тягового органа на приводном блоке в соответствии с действующим законом трения гибких тел – уравнением Эйлера 1775 г. [1 – 3].

При этом не учитывается другое усилие натяжения гибкого тягового органа на приводном блоке, от которого в совокупности с первым, как известно, зависит нормальная реакция между телами, а следовательно, и тяговое усилие машины.

Упомянутое уравнение Эйлера и его вывод, ставшие классическими, нашли всеобщее признание во всем мире и до настоящего времени используются в образовании, научных исследованиях, в машиностроении и при эксплуатации транспортных машин. Однако, ввиду действовавших в период выводов уравнения Эйлера представлений о трении тел и сохранении механической энергии, оно является приближенным [2, 4, 5]. В том числе оно не отвечает общепризнанным представлениям философов и ученых относительно трения тел, которые сложились на протяжении столетий (работы Аристотеля, авторов законов трения тел Леонардо да Винчи, Амонтона, самого Эйлера и Кулона, подтвержденные исследователями) [6].

Следовательно, возникает сомнение относительно правильности представлений о трении гибких тел и методик определения тяговой способности машин, действующих в настоящее время. Указанное свидетельствует о недостаточном уровне знаний (в том числе получаемых в учебных заведениях) в области трения гибких тел, что приводит к ошибкам и неточностям в научных исследованиях и при проектировании транспортных машин, негативно сказывается на эффективности и безопасности эксплуатации машин и имеет большое научное и практическое значение.

Поэтому авторы статьи в рамках консервативной механической системы осуществили новый вывод результатов решения классической задачи Эйлера о скольжении гибкого тела по неподвижному блоку с учетом современных знаний о трении тел и сохранении механической энергии в замкнутой механической системе [4, 5].

Целью статьи является обоснование правильности нового уравнения трения гибких тел и условий реализации заданного тягового усилия трением гибкого тела по блоку.

В первую очередь отметим некоторые закономерности, присущие общим законам. Исследователи уже давно заметили проявление в окружающем мире подобия, заключающегося в схожести некоторых законов, описывающих взаимодействие влияющих факторов в различных явлениях, что свидетельствует об общности принципов явлений и их правильности. Например, описание взаимодействия в электромагнитном и в гравитационном полях и, как следствие, создание общей теории поля А. Эйнштейна. Следовательно, подобие и подавно должно проявляться в одной области знаний, например, при трении тел.

Рассмотрим особенности трения тел по плоской и цилиндрической поверхности и попытаемся установить их общие элементы.

Явление трения чрезвычайно сложное. Человечество начало сталкиваться с особенностями трения тел на заре истории материального производства задолго до понимания его законов. Еще великий философ Аристотель (384 – 322 г. до н. э.) указывал, что трение тел есть сопротивление среды относительно перемещению (рис. 1).

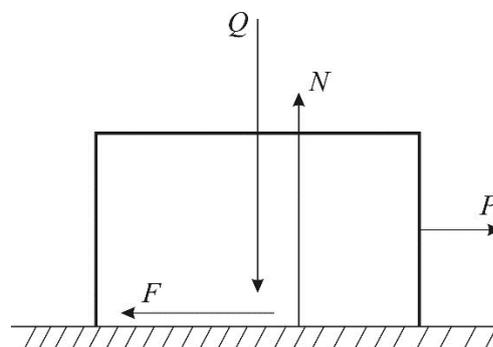


Рис. 1 – Расчетная схема скольжения твердых тел:

Q – нормальная составляющая силы прижатия тел; N – нормальная реакция между телами, обусловленная контролируемым весом и силой прижатия; F – сила трения между телами; P – сила, приложенная к телу, равная силе трения F и поддерживающая равномерное движение одного тела относительно другого

Сопротивление, которое возникает при трении, Аристотель считал зависящим от веса тела – нормальной составляющей силы прижатия или нормальной реакции между телами, обусловленной этой силой. Дадим более общую форму записи указанной функции, не зависящей от условий относительного пространственного действия сил Q и P и угла наклона поверхности трения:

$$F = F(N),$$

где F – сила трения между телами; N – нормальная реакция между телами; $F(N)$ – зависимость силы трения от нормальной реакции между телами.

За нормальную реакцию между телами принята сила, действующая на механическую систему со стороны другого тела по нормали к линии (поверхности) контакта при трении, без учета межмолекулярного взаимодействия, как принято при толковании (аналитическом и графическом) господствующего закона трения тел Кулона [6].

В первых работах о трении тел Леонардо да Винчи (1452 – 1519) указывал на прямую пропорциональность сопротивления движению тел нормальной силе прижатия между телами или нормальной реакции, обусловленной силой прижатия:

$$F = fN,$$

где f – коэффициент пропорциональности между силами.

Коэффициент пропорциональности между этими силами – коэффициент трения f , равный отношению силы трения к нормальной реакции между телами. Исследования Леонардо да Винчи опередили работы его современников и отчасти поэтому были забыты. Позже, независимо от этого, первый закон трения был вновь «открыт» французским ученым Г. Амонтоном через 180 лет в 1699 г.

Действующий закон трения гибких тел – уравнение трения гибких тел Эйлера, выведенное им в 1775 г. при решении задачи о скольжении гибкого тела (невесомой, нерастяжимой и абсолютно гибкой нити) по неподвижному блоку [2, 3] (рис. 2).

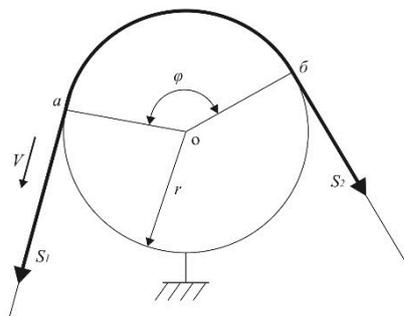


Рис. 2 – Расчетная схема:

S_1, S_2 – большая и меньшая силы, приложенные к концам гибкого тела (натяжения в сбегающей и набегающей на блок ветвях гибкого тела) при скольжении; r – радиус блока;
 φ – угол обхвата блока гибким телом

Согласно уравнению Эйлера, при скольжении по неподвижному блоку гибкое тело под действием приложенных к его концам сил скользит в направлении большей силы, которая возникает между телами, а отношение большей силы к меньшей равно

$$\frac{S_1}{S_2} = e^{f\varphi},$$

где S_1, S_2 – большая и меньшая силы, приложенные к концам гибкого тела (натяжения в сбегающей и набегающей на блок ветвях гибкого тела) при скольжении; f – коэффициент трения скольжения между гибким телом и блоком; φ – угол обхвата блока гибким телом; $e^{f\varphi}$ – тяговый фактор.

Уравнение трения гибких тел получено в результате решения системы дифференциальных уравнений равновесия элементарного участка гибкого тела при скольжении по неподвижному блоку. Система уравнений включает два уравнения равновесия сил и закон трения тел Амонтона, включающий силу трения и нормальную реакцию между телами, которые в том числе связаны между собой посредством коэффициента трения [2, 3]:

$$\begin{cases} \sum Py_i = 0 \Rightarrow dN = Sda; \\ \sum Px_i = 0 \Rightarrow dS = dF; \\ dF = fdN, \end{cases}$$

где Pu_i – силы, действующие на элементарный участок гибкого тела dl в направлении действия нормальной реакции; Pxi – силы, действующие на элементарный участок гибкого тела dl по касательной; dN – нормальная реакция между элементарным участком гибкого тела и блоком; S – натяжение гибкого тела в заданном сечении; da – элементарный угол обхвата блока, соответствующий элементарному участку гибкого тела длиной dl ; dF – сила трения между элементарным участком гибкого тела dl и блоком.

Попытаемся представить уравнение Эйлера с помощью силы трения и нормальной реакции между телами.

Сначала дадим пояснение понятия «нормальная реакция между гибким телом и блоком при скольжении». Сила прижатия гибкого тела к блоку вдоль линии контакта при скольжении обусловлена усилиями натяжения гибкого тела, и будет неодинаковой (рис. 2). Самая большая удельная сила нормального прижатия гибкого тела к блоку наблюдается в точке a и по линии контакта монотонно уменьшается к наименьшему значению в точке b . При этом удельные силы направлены к блоку по нормали в каждой точке линии контакта. Удельные нормальные реакции вдоль линии контакта тел будут такими же, но направлены в противоположную сторону – от блока. Суммарная нормальная реакция между телами равна суммарной силе прижатия гибкого тела к блоку и определяется удельными нормальными реакциями по линии контакта тел.

Теперь рассмотрим второе уравнение в системе дифференциальных уравнений равновесия:

$$dF = dS.$$

Таким образом, суммарная сила трения между телами равна разности усилий, приложенных к концам гибкого тела:

$$\int_0^F dF = \int_{S_2}^{S_1} dS \Rightarrow F = S_1 - S_2,$$

где F – суммарная сила трения между гибким телом и блоком.

Следовательно, уравнение Эйлера можно обобщить и представить с помощью силы трения между телами:

$$F = S_1 - S_2 = S_2 e^{\mu\varphi} - S_2 = S_2 (e^{\mu\varphi} - 1)$$

или

$$F e^{f\varphi} = S_2 (e^{f\varphi} - 1) e^{f\varphi} = S_1 (e^{f\varphi} - 1).$$

Каждое из указанных выражений не содержит другого усилия натяжения гибкого тела на блоке, от которого в совокупности с первым усилием натяжения, как известно, зависит нормальная реакция между телами. Однако на практике в соответствии с этими выражениями ведут расчет тяговой способности машин по формулам [1]:

$$S_{2\min} = \frac{F_0 k_T}{(e^{f\varphi} - 1)}; S_{1\min} = \frac{F_0 k_T e^{f\varphi}}{(e^{f\varphi} - 1)}$$

где $S_{2\min}$ – меньшая минимальная сила, приложенная к одному из концов гибкого тела при скольжении; $S_{1\min}$ – большая минимальная сила, приложенная к другому из концов гибкого тела при скольжении; F_0 – реализуемое тяговое усилие машины при сцеплении; k_T – коэффициент запаса тяговой способности машины (например, для ленточных конвейеров и шахтных напочвенных дорог коэффициент запаса составляет от 1,2 до 1,4 (от 20 до 40 % запаса), а для шахтных подъемных машин – 2,3 (130 % запаса)).

То есть обобщенное уравнение Эйлера включает силу трения, но не содержит нормальной реакции между телами. Вместе с тем при выводе уравнения Эйлера оба параметра были включены в уравнения системы дифференциальных уравнений равновесия элементарного участка гибкого тела при скольжении.

В 1779 г., после выводов Эйлера, французский физик Кулон установил новый закон трения, который господствует до настоящего времени. Он обнаружил, что коэффициент трения зависит от материала и шероховатости тел, длительности контакта и скорости скольжения. Несколько позже было установлено, что величина силы трения возрастает с увеличением скорости, а коэффициент трения убывает с увеличением усилия прижатия (реакции) между телами [6].

Аналитически зависимость силы трения от нормальной реакции между телами (с достаточной для практики точностью посредством коэффициента трения) показывает, что они связаны между собой линейной, но не прямо пропорциональной, как полагали Леонардо да Винчи и Амонтон, а двухпараметрической зависимостью:

$$F = F_0 + N \operatorname{tg} \beta$$

где F_0 – сила трения между телами, когда нормальная реакция между телами равна нулю (один из параметров трения тел Кулона); $\operatorname{tg} \beta$ – коэффициент пропорциональности между силой трения и нормальной реакцией между телами (второй из параметров трения тел Кулона); β – угол наклона зависимости между силой трения и нормальной реакцией.

Анализ действовавших и действующих законов трения тел по плоскости показал, что они содержат одни и те же параметры трения тел – общепризнанные факторы трения тел, а именно силу трения и нормальную реакцию между телами, которые линейно связаны между собой посредством коэффициента пропорциональности (коэффициента трения или параметров трения тел Кулона F_0 и $\operatorname{tg} \beta$).

Следовательно, реализуемая на плоскости сила тяги между конкретными телами регулируется величиной нормальной реакции между телами, что используется в самоходных транспортных машинах, например рельсовых локомотивах, автомобилях и др.

Однако уравнение Эйлера выходит за пределы общего характера законов трения плоских тел. В обобщенном виде уравнение Эйлера не содержит общепризнанного фактора трения – нормальной реакции между телами, а также не подтверждает линейной связи с силой трения.

Вместе с тем понимание природы трения гибких тел, сложившееся у специалистов, отвечает господствующему представлению о трении тел. Считается, что сила трения между гибким телом и блоком, как отмечалось ранее, возникает в результате его прижатия к блоку под действием усилий натяжения гибкого тела [2, 3]. Однако в расчетах тяговой способности машин указанное суждение не используется.

Несмотря на несоответствие между уравнением Эйлера и данными практики, различие между ним и действующими представлениями о трении плоских тел до недавнего времени считалось самым совершенным [2].

Авторами получено новое уравнение трения для идеального гибкого тела [4, 5]:

$$S_1 - S_2 = F_c + \operatorname{tg}\beta \left(\varphi \frac{S_1 + S_2}{2} \right).$$

С учетом центробежных сил

$$S_1 - S_2 = F_c + \operatorname{tg}\beta \left(\varphi \frac{S_1 + S_2 - 2 \cdot qv^2}{2} \right),$$

где q – линейная масса гибкого тела; v – скорость движения гибкого тела.

Представим полученное уравнение в обобщенном виде с использованием общепризнанных факторов трения тел: силы трения и нормальной реакции между телами.

Известно, что сила трения между телами равна разности усилий, приложенных к гибкому телу. Кроме того, из уравнения системы дифференциальных уравнений равновесия гибкого тела $dN = Sda$ и $dN = (S - qv^2)da$, учитывающего центробежную силу гибкого тела, определим нормальную реакцию между телами:

$$\int_0^N dN = \int_0^\varphi S(\alpha)da \Rightarrow N = \int_0^\varphi \left(\frac{S_1 - S_2}{\varphi} a + S_2 \right) da = \varphi \frac{S_1 + S_2}{2},$$

где $S(a)$ – зависимость натяжения гибкого тела вдоль линии контакта с блоком [4, 5].

С учетом центробежных сил

$$\int_0^N dN = \int_0^\varphi (S(a) - qv^2) da \Rightarrow N = \int_0^\varphi \left(\frac{S_1 - S_2}{\varphi} a + S_2 - qv^2 \right) da = \varphi \frac{S_1 + S_2 - 2qv^2}{2}.$$

Отсюда в обобщенном виде уравнение трения гибких тел с использованием параметров трения Кулона будет таким:

$$F = F_c + \operatorname{tg}\beta \left(\varphi \frac{S_1 + S_2}{2} \right) = F_c + \operatorname{tg}\beta N.$$

С учетом центробежных сил

$$F = F_c + \operatorname{tg}\beta \left(\varphi \frac{S_1 + S_2 - 2qv^2}{2} \right) = F_c + \operatorname{tg}\beta N.$$

Обобщенное уравнение трения гибких тел с использованием коэффициента трения

$$F = \left(\frac{F_c}{N} + \operatorname{tg}\beta \right) N = fN = f \left(\varphi \frac{S_1 + S_2}{2} \right),$$

где $f = \left(\frac{F_c}{N} + \operatorname{tg}\beta \right)$

С учетом центробежных сил

$$F = \left(\frac{F_c}{N} + \operatorname{tg}\beta \right) N = fN = f \left(\varphi \cdot \frac{S_1 + S_2 - 2qv^2}{2} \right).$$

При этом двухпараметрическая линейная зависимость силы трения от нормальной реакции между телами (новое уравнение гибких тел) формально-искусственно переводится в пропорциональную, как в случае трения плоских тел. В этом случае коэффициент трения является не постоянной величиной, а переменной. Он обратно пропорционален нормальной реакции между телами, что отвечает практике.

Следовательно, новые уравнения трения гибких тел в обобщенном виде, выраженные с использованием традиционных и общепризнанных влияющих факторов (силы

трения и нормальной реакции между телами), совпадают с господствующим в настоящее время законом трения тел Кулона. Это указывает на общий характер закона трения тел Кулона, который распространяется на все тела, включая гибкие.

Таким образом, условием реализации заданного тягового усилия трением гибкого тела по блоку также является достаточная нормальная реакция между телами, как в случае реализации тягового усилия на плоскости:

$$N = \frac{\varphi(S_1 + S_2)}{2} \geq \frac{F_0}{f}$$

и

$$N = \frac{\varphi(S_1 + S_2 - 2qv^2)}{2} \geq \frac{F_0}{f} \text{ (с учетом центробежных сил).}$$

Или соответствующее суммарное усилие натяжения гибкого тела на приводном блоке:

$$(S_1 + S_2) = \frac{2N}{\varphi}$$

и

$$(S_1 + S_2) = \frac{2N}{\varphi} + 2qv^2 \text{ (с учетом центробежных сил), где } N \geq \frac{F_0}{f}.$$

Указанные условия отвечают общим представлениям о трении плоских тел, являются логичными, очевидными и понятными.

Экспериментальное подтверждение правильности нового уравнения трения гибких тел осуществляли на испытательном стенде путем определения фрикционных характеристик конвейерной ленты различными методами. В проведенном эксперименте сравнивались оценки коэффициента трения конвейерной ленты с блоком и с телом, изготовленным из материала блока конвейера с заданной чистотой поверхности, а также силы трения и нормальной реакции между телами при скольжении по блоку. Определение фрикционных свойств осуществляли в соответствии с законом Амонтона, уравнением Эйлера и новым уравнением трения гибких тел.

Испытательный стенд представлял собой короткий конвейер без роликоопор, концевой блок которого затормаживается [4, 5].

Силу трения между конвейерной лентой и телом в соответствии с законом Амонтона измеряли динамометром. При испытании тело было расположено на конвейерной ленте, охватывающей концевой блок, и балансировало в горизонтальной плоскости. В качестве тела использовался запасной отклоняющий блок.

Условия испытаний: суммарное усилие натяжения конвейерной ленты ($S_1 + S_2$) – 3303 Н; угол обхвата барабана конвейерной лентой (φ) – 3,14 рад; скорость движения конвейерной ленты (v) – 1 м/с; масса тела (запасного отклоняющего блока) составляла 13,17 кг. В табл. 1 приведены оценки фрикционных характеристик конвейерной ленты при скольжении, определенных различными методами.

Анализ экспериментальных данных показал, что коэффициент трения конвейерной ленты по новому уравнению трения гибких тел близок к показателю, определенному в соответствии с законом трения тел Амонтона (разница показателей составляет меньше 3 %), что указывает на их правильность. Коэффициент трения конвейерной ленты по блоку впервые определяли прямым методом как отношение силы трения к нормальной реакции между телами. Этот коэффициент был принят в качестве действительного значения показателя.

И наоборот, экспериментальные данные свидетельствуют о значительном отличии фрикционных характеристик конвейерной ленты, установленных согласно уравнению Эйлера, от действительных. Значение косвенного показателя коэффициента трения

конвейерной ленты на 14 и 17 % выше по сравнению с показателем согласно новому уравнению трения (действительным значением) и закону трения тел Амонтона, соответственно.

Таблица 1

**Оценки фрикционных характеристик конвейерной ленты,
определенных различными методами**

№	Условия испытаний			Фрикционные характеристики конвейерной ленты							
	Скорость движения ленты, v , м/с	Силы натяжения ленты S_1/S_2 , H	Масса тела m , кг	Действительная сила трения $F_{\text{д}}$, H	Уравнение Эйлера			Новое уравнение трения			Закон Амонтона
					Нормальная реакция N , H	Сила трения F , H	Коэффициент трения f	Нормальная реакция N , H	Сила трения F , H	Коэффициент трения f	Коэффициент трения f
1	1,0	2590/ 713	-	1877	-	1511	0,411	5186	1877	0,362	-
2	1,0	1651/ 1651	13,17	46,70	-	-	-	-	-	-	0,352

Примечание. Испытание № 1 – определение фрикционных характеристик конвейерной ленты и блока. Испытание № 2 – определение коэффициента трения конвейерной ленты и тела.

Значительное отличие косвенного коэффициента трения конвейерной ленты, определенного в соответствии с уравнением Эйлера, от действительного указывает на методическую ошибку, обусловленную приближенностью уравнения.

Сила трения, возникающая между гибким телом и блоком, рассчитанная в соответствии с новым уравнением трения, практически совпадает с ее действительным значением. Она на 20 % выше силы трения, определенной в соответствии с уравнением Эйлера, что свидетельствует об ошибочности действующего условия реализации заданного тягового усилия трением по блоку, используемого в тяговых расчетах машин.

Кроме того, по новому решению задачи Эйлера нормальная реакция между лентой и блоком составляет 5186 H . В соответствии с выводами Эйлера нормальную реакцию между телами прямым методом определить невозможно.

Следовательно, результаты эксперимента согласуются с накопленными данными практики [2].

Выводы

Таким образом, теоретически и экспериментально подтверждена правильность нового решения задачи Эйлера о скольжении гибкого тела по неподвижному блоку.

Новое уравнение трения гибких тел впервые восстанавливает общепризнанное представление о прямом влиянии на силу трения нормальной реакции между телами, а также подтверждает их линейную связь между собой. Указанное свидетельствует, что действующий закон трения тел Кулона является общим, он распространяется на все тела, включая гибкие. Поэтому условием реализации заданного тягового усилия трением гибкого тела по блоку является достаточная нормальная реакция между телами при трении тел по плоскости (что реализуется в самоходных машинах) или достаточное суммарное усилие предварительного натяжения гибкого тела на блоке.

Новые знания расширяют наши представления о трении гибких тел, способствуют повышению уровня образования и прогрессу в научных исследованиях, обуславливают обоснование рациональных режимов эксплуатации существующих машин, создание новых машин и повышение их эффективности и безопасности.

Литература

1. РТМ 24.093.04-80. Основные требования к проектированию ленточных конвейеров общего назначения. – М.: ЦНИИТЭИтяжмаш, 1982. – 141 с.
2. Андреев А.В. Передача трением / А.В. Андреев. – М.: Машгиз, 1978. – 176 с.
3. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики: учеб. для вузов / С.М. Тарг. – 12-е изд. – М.: Высшая школа, 1998. – 416 с.
4. Лубенец Н.А. Новое решение задачи Эйлера о скольжении гибкого тела по неподвижному блоку / Н.А. Лубенец // Науковий вісник НГУ–Д. - 2014. – № 3. – С. 45 - 53.
5. Лубенец Н.А. Влияние центробежных сил при трении гибких тел по барабану / Н.А. Лубенец, Т.Н. Лубенец // Проблемы недропользования [Электронный ресурс]: рецензируемое сетевое периодическое научное издание / ИГД УрО РАН. – 2014. – № 2. – С. 102 -109. – Режим доступа: //trud.igduran.ru
6. Колчин Н.И. Механика машин. Т2. Кинестатика и динамика машин. Трение в машинах / Н.И. Колчин - Л.: Машиностроение, 1972. - 456 с.