УДК 622.271.332:622.236
DOI: 10.18454/2313-1586.2017.02.096

Жабко Андрей Викторович
кандидат технических наук, доцент,
доцент кафедры маркшейдерского дела,
Уральский государственный
горный университет,
620144, г. Екатеринбург, ул. Куйбышева, 30
e-mail: zhabkoav@mail.ru

ЭНЕРГЕТИЧЕСКАЯ ТРАКТОВКА УСЛОВИЯ РАЗРУШЕНИЯ ОТКОСОВ

Аннотация:

В работе, на основе выполненных ранее автором исследований по вопросам устойчивости откосов, получен вариационный принцип разрушения.

Ключевые слова: откос, поверхность скольжения, условие равновесия, вариационный принцип, работа, потенциал, разрушение

Zhabko Andrew V.
candidate of technical sciences,
associate professor, mine surveying department,
The Ural State Mining University,
620144, Yekaterinburg, 30 Kuibishev st.
e-mail: zhabkoav@mail.ru

STABILITY OF SLOPES IN THE FIELD TECTONIC TENSION

Abstract:

In terms of the researches on questions of slopes stability executed earlier by the author, the variation principle of destruction is obtained in the article.

Key words: slope, surface of sliding, balance condition, variation principle, work, potential, destruction

В работах [1 – 6] представлена общая теория устойчивости или разрушения откосов сооружений. Данная теория является законченной работой, позволяющей производить оценку устойчивости откосов сооружений практически для любых горно-геологических условий разработки: однородного откоса, неоднородного откоса, анизотропного откоса, подработанного откоса, обводненного откоса, откоса в поле тектонических напряжений и сейсмических нагрузок. Отличительной особенностью данной теории является ее строгость. Полученные в ней условия равновесия откосов и дифференциальные уравнения поверхностей скольжения являются фундаментальными для континуальной среды.

Как показано в работах [1, 3], условие равновесия призмы смещения в общем виде определяется уравнением[1]:

$$\int\left[\gamma(\widehat{y}-y)(y'-f)-C\left(1+y'^2\right)+\left(T'+fE'\right)y'\right]dx+\left(E_1-E_0\right)-f\left(T_1-T_0\right)=0, \qquad (1)$$

где γ – объемный вес горных пород; $\widehat{y}, y$ – функции линий откоса и поверхности скольжения, соответственно; $y'=\mathrm{tg}\vartheta$ – производная функции поверхности скольжения; T_0, E_0, T_1, E_1 – внешние касательные и нормальные реакции на вертикальных гранях призмы смещения, соответственно, слева и справа; $f=\mathrm{tg}\varphi$ – коэффициент внутреннего трения (тангенс угла внутреннего трения); C – сцепление массива горных пород; E', T' – соответственно, производные функций нормальной и касательной составляющих межблоковой реакции[2].

В однородных массивах при углах наклона поверхности скольжения, превышающих угол внутреннего трения $\left(\vartheta_i \geq \varphi\right)$, условие равновесия призмы смещения определяется уравнением:

[1] Здесь и далее пределы интегрирования функционалов опущены за ненадобностью.
[2] В приведенных зависимостях могут быть использованы абсолютно любые единицы измерений согласных между собой, например система СИ (сила – Н; напряжение, сцепление – Па; объемный вес – Н/куб. м; длина – м, и т.д.) или внесистемные единицы измерения, часто используемые в геомеханике.

$$\int\left[\frac{\gamma(\hat{y}-y)(y'-f)-C\left(1+y'^2\right)}{1+y'^2}\right]dx+\left(E_1-E_0\right)-f\left(T_1-T_0\right)=0. \qquad (2)$$

А для участков с углами наклона поверхности скольжения $\left(\vartheta_i<\varphi\right)$ условие равновесия имеет следующий вид:

$$\int\left[\frac{\gamma(\hat{y}-y)(y'-f)-C\left(1+y'^2\right)}{1+fy'}\right]dx+\left(E_1-E_0\right)-f\left(T_1-T_0\right)=0. \qquad (3)$$

Уравнения (2) и (3) получены из уравнения (1). Причем условие (2) подразумевает присутствие и касательной, и нормальной составляющих межблоковой реакции, а уравнение (3) – только нормальной составляющей [1, 3].

Положим в уравнении (1) $E'=T'=0$, получим следующее условие равновесия:

$$\int\left[\gamma(\hat{y}-y)(y'-f)-C\left(1+y'^2\right)\right]dx+\left(E_1-E_0\right)-f\left(T_1-T_0\right)=0. \qquad (4)$$

Уравнения (2), (3), (4) позволяют оценить устойчивость призмы смещения (откоса) по произвольной поверхности скольжения.

Для определения положения и формы (геометрии) наиболее опасной поверхности скольжения в плоском однородном откосе с горизонтальной бермой решалась следующая задача вариационного исчисления [1, 3]:

$$\int\limits_{\vartheta\le\varphi}\left[\frac{(kx-y_1)(y_1'-f)-\lambda\left(1+y_1'^2\right)}{1+fy_1'}\right]dx+\int\limits_{\vartheta>\varphi}\left[\frac{(kx-y_2)(y_2'-f)-\lambda\left(1+y_2'^2\right)}{1+y_2'^2}\right]dx+ \qquad (5)$$

$$+\int\limits_{\text{берма}}\left[(H-y)(y'-f)-\frac{C}{\gamma}\left(1+y'^2\right)\right]dx\to\max,$$

где $k=\mathrm{tg}\alpha$ – тангенс угла наклона плоского откоса; H – высота откоса; $\lambda=\dfrac{C}{\gamma n}>0$ – постоянная, зависящая от формы откоса, физико-механических свойств горных пород, определяющая предельную высоту откоса; n – постоянная, обеспечивающая выполнение условия предельного равновесия в пределах каждого отсека.

Для плоских однородных откосов, с учетом (5), наиболее опасная поверхность скольжения (откос включает верхнюю берму и собственно откос) определяется дифференциальными уравнениями [1, 3]:

$$kx-y_1=\lambda\frac{(kf-1)y_1'^2+2(k+f)y_1'+1-kf}{fy_1'^2-2f^2y_1'+k-f+kf^2}, \qquad -\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha+\varphi}{2}\right)\le y_1'\le\mathrm{tg}\varphi,\ \text{откос},$$

$$kx-y_2=\lambda\frac{1+kf}{1+f^2}\frac{\left(1+y_2'^2\right)^2}{2y_2'^3-(k+3f)y_2'^2+2kfy_2'+k-f},\ y_2'>\mathrm{tg}\varphi,\ \text{откос}, \qquad (6)$$

$$\left(H-y_3\right)=\frac{C\left(y_3'^2-1\right)}{\gamma\mathrm{tg}\varphi},\ \text{берма}.$$

На рис. 1 приведены наиболее опасные поверхности скольжения и плоские откосы в предельном равновесии.

С методикой построения поверхностей скольжения и определения предельных параметров откосов (высоты и угла) можно ознакомиться в работах [1, 3].

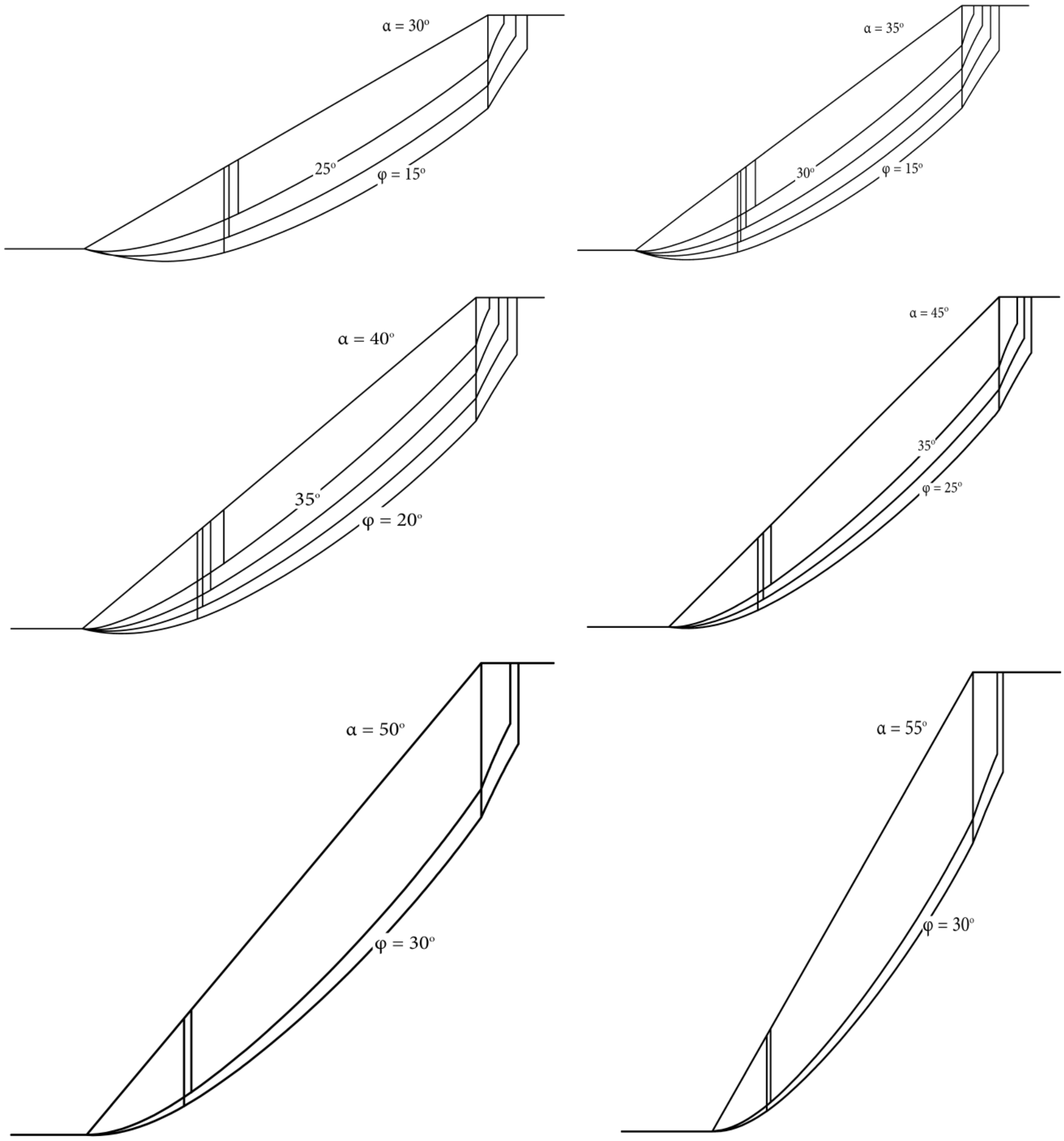

Рис. 1 – Поверхности скольжения в плоских однородных откосах

Условие равновесия откоса (призмы смещения) в условиях обводненности, сейсмичности и тектонических напряжений примет следующий вид (интегралы заменены на суммы, а производные функции поверхности скольжения выражены через углы ее наклона) [1, 6]:

$$
\begin{aligned}
&\sum_{\vartheta\le\varphi}\left[\frac{\gamma h\left(\mathrm{tg}\vartheta-\mathrm{tg}\varphi+k_{\text{с}}/\left(\cos\vartheta\cos\varphi\right)\right)+k_{\text{к}}\sigma_{\text{т}}\mathrm{tg}\vartheta\left(1+\mathrm{tg}\varphi\mathrm{tg}\vartheta\right)-\left(C-\gamma_{\text{в}}h_{\text{в}}\mathrm{tg}\varphi\right)\left(1+\mathrm{tg}^2\vartheta\right)}{1+\mathrm{tg}\varphi\mathrm{tg}\vartheta}\right]\Delta+\\
&+\sum_{\vartheta>\varphi}\left[\frac{\gamma h\left(\mathrm{tg}\vartheta-\mathrm{tg}\varphi+k_{\text{с}}/\left(\cos\vartheta\cos\varphi\right)\right)+k_{\text{к}}\sigma_{\text{т}}\mathrm{tg}\vartheta\left(1+\mathrm{tg}\varphi\mathrm{tg}\vartheta\right)-\left(C-\gamma_{\text{в}}h_{\text{в}}\mathrm{tg}\varphi\right)\left(1+\mathrm{tg}^2\vartheta\right)}{1+\mathrm{tg}^2\vartheta}\right]\Delta+ \qquad (7)\\
&+\sum_{\text{берма}}\left[\gamma h\left(\mathrm{tg}\vartheta-\mathrm{tg}\varphi+k_{\text{с}}/\left(\cos\vartheta\cos\varphi\right)\right)+k_{\text{к}}\sigma_{\text{т}}\mathrm{tg}\vartheta\left(1+\mathrm{tg}\varphi\mathrm{tg}\vartheta\right)-\left(C-\gamma_{\text{в}}h_{\text{в}}\mathrm{tg}\varphi\right)\left(1+\mathrm{tg}^2\vartheta\right)\right]\Delta=0,
\end{aligned}
$$

где h – высота отсека (вертикальное расстояние от поверхности скольжения до поверхности откоса в точке); $k_с = a / g$ – коэффициент сейсмичности, равный отношению ускорения сейсмической волны к ускорению свободного падения; $k_к$ – коэффициент концентрации нормального напряжения в точке поверхности скольжения в горизонтальном направлении; $\sigma_т = \xi \gamma h_1$ – тектоническое (горизонтальное) напряжение нетронутого (естественного) массива; ξ – коэффициент, изменяющийся в реальных условиях от 0 до 10 − 12; h_1 – глубина точки поверхности скольжения, отсчитываемая от ненарушенной (естественной) поверхности земли; $\gamma_в$, $h_в$ – объемный вес воды и высота ее столба над поверхностью скольжения; Δ – ширина вертикального отсека (блока).

Каждый из функционалов (5) можно представить в следующем виде:

$$\int \left[A(x,y,y')(\hat{y} - y) - \mu \eta(x,y,y') \sqrt{1+y'^2} \right] dx = \\ = \int A(x,y,y') dS - \mu \int \eta(x,y,y') dl \to \max, \tag{8}$$

где $A(x,y,y')$ − некоторая функция координат и производной поверхности скольжения; $\eta(x,y,y')$ − некоторая функция; μ − постоянная; dS − дифференциал площади; dl − дифференциал дуги поверхности скольжения (разрушения).

Заметим, что выражение (8) можно представить как вариационное уравнение:

$$\delta \left[\frac{\int A(x,y,y') dS}{\int \eta(x,y,y') dl} \right] = 0, \text{ или } \frac{\int A(x,y,y') dS}{\int \eta(x,y,y') dl} \to \max, \tag{9}$$

где δ − вариация функционалов или их функции.

Условия равновесия (1) – (4), (7) и вариационная задача (5) получены исходя из принципа возможных перемещений [1, 3], который, как известно, является энергетическим. В этой связи функция $A(x,y,y')$ представляет собой удельную работу внутренних (приложенных внутри призмы смещения или объемных) сил и внешних сил, зависящих от объемных (трение), на возможном перемещении всей механической системы (призмы смещения). По сути, функция $A(x,y,y')$ является удельной потенциальной энергией деформации твердого тела на возможном перемещении. А функция $\eta(x,y,y')$ является половиной удельной поверхностной энергии разрушения на возможном перемещении системы.

Рассмотрим случай, когда A и η постоянны, то есть работа внутренних и объемных сил на возможном перемещении (удельная потенциальная энергия деформации) и удельная поверхностная энергия разрушения не зависят от координат точки. В этом случае решением вариационного уравнения (9), при отсутствии дополнительных условий, для объемной задачи является шар, а в плоском случае – круг. Данный результат следует из так называемой изопериметрической задачи (задача Дидоны) и закона ее взаимности, например [1]. То есть при фиксированном числителе в уравнении (9) знаменатель минимизирован, и, наоборот, при постоянном знаменателе числитель максимален. Приведем несколько примеров.

Как известно, капля воды в невесомости принимает сферическую форму, минимизируя посредством площади энергию поверхностного натяжения. Другим примером является одиночный мыльный пузырь, также принимающий в полете форму шара. Согласно теореме Пуассона средняя кривизна поверхности раздела двух физических сред, находящихся в равновесии, пропорциональна разности давлений в этих средах (для пузыря разность давлений отлична от нуля, тогда средняя кривизна постоянна и отлична от нуля). Мыльные пленки впервые подробно исследовал Плато, который вывел следующие правила:

– три поверхности могут сходиться под углом только 120º;

– разграничивающие кривые обязаны встречаться только по четыре и только под углом примерно 109 градусов 28 минут – это углы, под которыми в правильном тетраэдре расходятся отрезки, соединяющие его центр с вершинами.

Кошка, сворачивающаяся в клубок, отдает в окружающее пространство меньше теплоты, но самое удивительное, что кошка не может мыслить, она это делает в угоду инстинкту. Замерзший человек также подгибает ноги и горбится, сам не понимая, для чего он это делает, это получается как бы произвольно, как будто им кто-то управляет, в том числе во сне. По этой же причине, например, Солнце, Земля и Луна имеют шарообразную форму.

Шары как экстремальные геометрические фигуры не могут абсолютно компактно заполнить предоставленное им трехмерное пространство, наилучшая упаковка шаров составляет $\pi/\sqrt{18} \approx 74\%$ (задача Кеплера, 1611 г.), а для плоского аналога – $\pi/\left(\sqrt{12}\right) \approx 90\%$. В этой связи дополнительным условием к принципу (9) может являться требование полного заполнения фигурами всего предоставленного им пространства. В случае постоянных A и η приходим к задаче Кельвина (Томсона), 1887 г. То есть необходимо найти форму фигур с наименьшими поверхностями, непрерывно заполняющими бесконечное пространство, при одинаковых и заданных объемах. Последним решением-приближением является форма Уэйра – Фелана, для плоского случая решением, по-видимому, является система шестигранников, напоминающих пчелиные соты. С другой стороны, при одинаковом числе сторон и равных периметрах площадь правильного многоугольника больше, чем неправильного. Из двух правильных многоугольников с равными периметрами площадь больше у того многоугольника, у которого больше сторон. Необходимо также отметить, что на форму оптимальных объемов сильно влияет граница области, в которой они находятся, то есть геометрия границы тела. Таким образом, реальная форма тел деструкции в конечном итоге будет зависеть от особенностей распределения энергии по объему тела, его формы, структурных особенностей на микро-, мезо- и макроуровне.

Приведем примеры из горного дела. Примером из геомеханики открытых горных работ является так называемая “круглоцилиндрическая” поверхность скольжения, предложенная Петерсоном в 1916 г. и подтверждаемая Шведской геотехнической комиссией. И действительно, при равномерности распределения энергий, поверхность скольжения представляла бы собой дугу окружности. Однако, как показано в работах [1, 3], функция поверхности скольжения лишь кусочно гладкая, то есть производная имеет разрыв. Это говорит о сложном распределении энергии вдоль поверхности скольжения. С другой стороны, каждый из трех участков поверхности скольжения в однородных откосах в отдельности достаточно тесно описывается дугой окружности. Кроме того, обращает на себя внимание тот факт, что на первых двух участках (нижних) поверхность скольжения вогнутая, а на третьем (верхнем) – выпуклая, но все равно по форме достаточно близка к дуге некоторой окружности (см. рис. 1). Зададимся вопросом, чем принципиально отличаются первый, второй и третий участки поверхности скольжения. Ответ очевиден: на третьем участке внутренние (межблоковые) реакции E, T не совершают работы на возможном перемещении. Таким образом, данный участок можно ассоциировать с идеальной пластичностью. По-видимому, для пластичной среды необходимо использовать не работу деформаций, а дополнительную работу. Математически это означает, что перед числителем в (9) нужно поставить знак минус. То есть оставшаяся часть горного массива экономит площади (объемы) с низкой потенциальной энергией (пластичные) и отбрасывает, не скупясь, объемы с повышенной потенциальной энергией (перенапряженные), во всех случаях минимизируя площадь вновь образованных поверхностей разрушения. Другими словами, экономится суммарная потенциальная энергия при разрушении. Е.М. Морозов [7] еще в 1961 году для условия равномерного двухосного растяжения выдвигал условие минимизации длины периметра при охвате наибольшей возможной по условиям разрушения площади в качестве принципа деструкции. Однако, как показано выше, для условий сдвигового разрушения и сложного распределения энергии по объему данное условие может оказаться несостоятельным.

Примером из геомеханики подземных горных работ является зональная дезинтеграция горных пород вокруг горных выработок в сильнонапряженных горных массивах [8]. Суть явления заключается в образовании вокруг горизонтальных выработок нескольких (в зависимости от уровня напряжений) кольцевых или квазипараллельных выработке зон упругих и пластических (разрушения) состояний горных пород, поочередно сменяющих друг друга. С вариационных позиций данный факт достаточно просто объясним. Кольцо разрушенных горных пород обладает минимальной длиной при заданной мощности (определяется напряженным состоянием), посредством чего минимизируется диссипация (рассеяние) энергии при разрушении, при этом оконтуривается максимальная площадь пород с высокой потенциальной энергией деформации (сильнонапряженные участки).

Используя теорию работ [1, 3], можно показать, что радиусы зон дезинтеграции формируются согласно некоторой постоянной:

$$m = 2\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right). \tag{10}$$

Примечательно, что если положить в (10) $\varphi = 0$ (идеально пластичные породы), то $m = \sqrt{2}$, что соответствует масштабному фактору [8]. Максимальное же значение (10) соответствует идеально хрупким породам и приближенно составляет $m \approx 1{,}85$, что соответствует постоянной модифицированного закона Тициуса – Боде (1,89) [9].

Таким образом, исходя из выражения (9) и его подробного анализа следует, что тело при деструкции, дезинтеграции (диссипации энергии), стремится отделить от себя части тела с повышенной потенциальной энергией и, наоборот, сохранить части тела с пониженной потенциальной энергией, при этом минимизируя площадь (длину для плоской задачи) поверхности отделения (деструкции). Во всех случаях выполняется условие предельного равновесия. Заметим, что при деструкции потенциальная энергия деформации тела отсекается некоторыми порциями (отделяемые тела имеют определенные размеры) – квантами энергии.

Обобщая уравнение (9), запишем вариационный принцип деструкции в общем виде:

$$\frac{\int\limits_V A(x,y,z)\,dV}{2\int\limits_{S_\tau} \eta_\tau(x,y,z)\,dS_\tau + 2\int\limits_{S_\sigma} \eta_\sigma(x,y,z)\,dS_\sigma} \to \mathrm{extr}, \tag{11}$$

где A − потенциал работы деформации или дополнительная работа; η_τ; S_τ − удельная поверхностная энергия разрушения при срезе и площадь вновь образованных поверхностей; η_σ; S_σ − удельная поверхностная энергия разрушения при разрыве и площадь вновь образованных поверхностей; V − отделяемый при деструкции объем.

Принцип (11) подразумевает стационарность процесса деструкции. Однако в принципе его можно модифицировать с учетом фактора времени. Коэффициент “2” в знаменателе (11) формален и показывает, что при разрушении тела (образование трещины) образуются две поверхности, однако на наличие экстремума выражения он не влияет.

Что касается вопроса физических предпосылок выполнения условий (9) и (11), то нужно признать, что это проблема будущих исследований, собственно, это касается и других вариационных принципов механики, да и не только механики. Однако можно предположить существование некоторого более общего вариационного принципа разрушения и созидания (самоорганизации) в природе.

Литература

1. Жабко А.В. Аналитическая геомеханика: научная монография / А.В. Жабко. – Екатеринбург: Изд-во УГГУ, 2016. – 224 с.
2. Жабко А.В. Теория расчета устойчивости откосов и оснований. Анализ, характеристика и классификация существующих методов расчета устойчивости откосов / А.В. Жабко // Известия Уральского государственного горного университета. – 2015. – № 4 (40). – С. 45 - 57.
3. Жабко А.В. Теория расчета устойчивости откосов и оснований. Общая теория расчета устойчивости однородных откосов / А.В. Жабко // Известия Уральского государственного горного университета. – 2016. – №1 (41). – С. 72-83.
4. Жабко А.В. Теория расчета устойчивости откосов и оснований. Расчет анизотропных, неоднородных и подработанных откосов / А.В. Жабко // Известия Уральского государственного горного университета. – 2016. – № 2(42). – С. 42 - 46.
5. Жабко А.В. Теория расчета устойчивости откосов и оснований. Устойчивость отвалов / А.В. Жабко // Известия Уральского государственного горного университета. – 2016. – № 3 (43). – С. 4 - 6.
6. Жабко А.В. Теория расчета устойчивости откосов и оснований. Устойчивость откосов в поле тектонических, сейсмических и гидростатических напряжений / А.В Жабко // Известия Уральского государственного горного университета. – 2016. – № 4 (44). – С. 47 - 50.
7. Левин В.А. Избранные нелинейные задачи механики разрушения / В.А. Левин, Е.М. Морозов, Ю.Г. Матвиенко. – М.: Физматлит, 2004. – 408 с.
8. Опарин В.Н. Научные открытия межтысячелетия в геомеханике и перспективы их применения / В.Н. Опарин // Геодинамика и напряженное состояние недр Земли: труды конференции с участием иностранных ученых, 2 – 5 октября 2007 г., Новосибирск. – Новосибирск: ИГД СО РАН, 2007. – С. 7 - 30.
9. Кашубин С.Н. Физика Земли: учеб. пособие для бакалавров / С.Н. Кашубин, В.Б. Виноградов, А.В. Кузин; под ред. В.В. Филатова. - 2-е изд., испр. и переработ. - Екатеринбург: УГГУ, 2005. – 188 с.