

УДК 622.28:519.7

**Саммаль Андрей Сергеевич**

доктор технических наук, профессор,  
Тулский государственный университет,  
кафедра механики материалов,  
300012, г. Тула, пр. Ленина, 92  
e-mail: [sammal@mm.tsu.tula](mailto:sammal@mm.tsu.tula)

**Анциферов Сергей Владимирович**

доктор технических наук, доцент,  
Тулский государственный университет,  
кафедра механики материалов

**Деев Петр Вячеславович**

доктор технических наук,  
Тулский государственный университет,  
кафедра механики материалов

**Павлова Наталия Сергеевна**

аспирант,  
Тулский государственный университет,  
кафедра механики материалов  
e-mail: [netcymii@gmail.com](mailto:netcymii@gmail.com)

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ  
ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ КРЕПИ  
И ВМЕЩАЮЩЕГО МАССИВА  
С УЧЕТОМ ВЛИЯНИЯ  
ГРАНИЦЫ РАЗДЕЛА СЛОЕВ ПОРОД\****Аннотация:*

*Предлагается аналитический метод расчета крепи горной выработки, сооружаемой в массиве, сложенном двумя типами пород с различными деформационными характеристиками. В основу метода положено соответствующее решение плоской задачи теории упругости о равновесии бесконечной весомой среды, составленной из двух различных материалов с прямолинейной границей раздела, ослабленной круговым отверстием, подкрепленным кольцом, выполненным из другого материала. Полученное решение базируется на применении теории аналитических функций комплексного переменного, свойств рядов с комплексными коэффициентами и интегралов типа Коши. Разработан полный алгоритм расчета, особенностью которого является компьютерная реализация хорошо сходящегося итерационного процесса. В первом приближении рассматривается известная задача для подкрепленного кругового отверстия в бесконечной однородной изотропной среде при наличии поля начальных напряжений, обусловленных действием гравитационных сил, а влияние неоднородности пород учитывается путем задания дополнительных членов в граничных условиях, уточняемых на следующих итерациях. Итерационный процесс продолжается до*

DOI: 10.25635/2313-1586.2018.03.151

**Sammal Andrey S.**

Doctor of Engineering, Professor,  
Tula State University,  
Department of Materials Mechanics,  
300012, Tula, Lenina avenue, 92  
e-mail: [sammal@mm.tsu.tula](mailto:sammal@mm.tsu.tula)

**Antsiferov Sergey V.**

Doctor of Engineering,  
Associate Professor,  
Tula State University,  
Department of Materials Mechanics

**Deev Petr V.**

Doctor of Engineering,  
Tula State University,  
Department of Materials Mechanics

**Pavlova Nataliya S.**

PG student, Tula State University,  
Department of Materials Mechanics  
e-mail: [netcymii@gmail.com](mailto:netcymii@gmail.com)

**MATHEMATICAL MODELING  
OF INTERACTION OF THE TIMBR AND  
THE SURROUNDING ROCK MASSIF WITH  
TAKING INTO ACCOUNT THE INFLUENCE  
OF THE BOUNDARY LAYERS OF ROCKS***Abstract:*

*The analytical solution of the problem of geometrical calculation of the timber is given, for the stress-strain state estimation of the massif, built from two types of soils with various deformation characteristics, near the circular opening located at the rectilinear boundary of rocks.*

*The method is based on the corresponding solution of the flat problem of the Theory of elasticity for the balance of the infinite weighty solid composed of two different materials with a straight-line boundary of a section weakened by a circular opening reinforced by a ring made of another material. The obtained solution is based on the application of the Theory of analytical functions of a complex variable and properties of series with complex coefficients and Cauchy-type integrals. A complete calculation algorithm is developed, the feature of which is the computer implementation of a well-convergent iterative process.*

*At first iteration, the well-known problem for a supported circular opening in an infinite homogeneous isotropic medium with the initial stress field due to the action of gravitational forces is considered, and the effect of the heterogeneity of rocks is taken into account by specifying additional terms in the boundary conditions, which are specified in the following iterations. The iterative process continues until the*

\* Выполненные исследования поддержаны грантом Президента РФ МД-1280.2017.5

тех пор, пока отличия искомым коэффициентов разложений искомым комплексных потенциалов Колосова - Мусхелишвили, полученных в двух соседних приближениях, не становятся меньше, например,  $10^{-6}$ . В заключение приводится сравнение результатов аналитического и численного моделирования применительно к конкретной выработке, которое показало, что высокая точность расчета с применением МКЭ достигается только при рассмотрении дополнительных напряжений в случае задания соответствующих нагрузок на крепь (при этом размеры рассматриваемой области компьютерной модели должны превышать радиус поперечного сечения выработки более, чем в 10 раз).

*Ключевые слова:* математическое моделирование, горный массив, горная выработка, крепь, теория упругости, граничные условия.

*differences between the required coefficients of the Kolosov - Muskhelishvili complex potentials expansions obtained in two adjacent approximations become less, for example,  $10^{-6}$ .*

*In conclusion, a comparison of the results of analytical and numerical modeling for concrete example is made, which showed that high accuracy of calculation using FEM may be obtained only in considering the additional stresses, if the corresponding loads, which are applied to the support (when the sizes of the considered area of the computer model exceeds the radius of opening more than 10 times).*

*Key words:* mathematical modeling, rock massif, opening, lining, timber, elasticity theory, boundary conditions.

Прогноз напряженно-деформированного состояния слоистого горного массива в окрестности горных выработок с учетом влияния существенного скачкообразного изменения деформационных характеристик на границе раздела пород является важной прикладной задачей геомеханики, поскольку успешное ее решение создает теоретическую основу для принятия научно обоснованных проектных решений, обеспечивающих применение надежных и экономичных видов крепи. Этим объясняется большое количество аналитических, численных и натурных исследований, посвященных этой проблеме, выполненных в последние годы [1 – 6].

До настоящего времени аналитические методы расчета в геомеханике ограничивались рассмотрением случаев, когда окружающий выработку массив пород моделируется однородной средой или обладает так называемой технологической неоднородностью, под которой понимается кольцеобразное изменение деформационных и прочностных свойств пород в окрестности выработки вследствие влияния технологических факторов, например, ослабления массива вследствие влияния буровзрывных работ, или, наоборот, укрепления путем нагнетания в массив связующих растворов [4]. Учет влияния слоистой структуры горных массивов, сложенных различными типами пород, вследствие отсутствия соответствующих аналитических методов, производился только на основе компьютерного моделирования с использованием численных методов, самым распространенным из которых является метод конечных элементов (МКЭ). Следует отметить, что современные компьютерные технологии, существенно расширяющие возможности численного моделирования происходящих в горном массиве геомеханических процессов, также создают предпосылки для разработки новых аналитических методов расчета, позволяющих более детально учитывать поведение горных массивов и конструктивные особенности подземных сооружений. Так, в результате применения современной вычислительной техники появилась возможность в ряде случаев отказаться от сложных математических преобразований, что существенно упрощает процесс получения расчетных формул и представляет строгие аналитические решения в виде вычислительных алгоритмов, как правило, реализующих итерационные процессы, а подлежащие определению функции представляет в виде бесконечных рядов. При этом корректность вычислительного процесса может быть проконтролирована в каждом приближении, а заключительная точность расчета проверена по его завершении на основе оценки удовлетворения поставленных в задаче граничных условий.

Описанный подход в настоящей работе реализован с целью получения нового аналитического решения задачи, связанной с оценкой напряженно-деформированного состояния геомеханической системы «крепь – массив», в случае, когда горная выработка

сооружается в непосредственной близости от прямолинейной границы раздела слоев пород с существенно различающимися деформационными характеристиками. Полученное решение позволяет выполнить сравнительный анализ результатов математического и численного, основанного на применении МКЭ, компьютерного моделирования. В результате формулируются конкретные рекомендации по соответствующей настройке компьютерной модели, позволившие в рассматриваемом конкретном случае получить наиболее полное соответствие расчетных полей напряжений и перемещений в массиве вокруг выработки.

Расчетная схема рассматриваемой задачи показана на рис. 1. Здесь горный массив моделируется областью, составленной из двух полубесконечных весомых сред  $S_{0,1}$  и  $S_{0,2}$ , моделирующих соответствующие породные слои с горизонтальной прямолинейной границей раздела  $L$ . Слои пород – области  $S_{0,j}$  ( $j=1, 2$ ) – имеют различные деформационные характеристики – модули деформации  $E_{0,j}$  ( $j=1,2$ ) и коэффициенты Пуассона  $\nu_{0,j}$  ( $j=1,2$ ) – и деформируются совместно, то есть на линии контакта  $L$  выполняются условия непрерывности векторов нормальных и касательных напряжений, а также смещений. Горная выработка, расположенная ниже границы раздела пород на расстоянии  $H^*$ , моделируется круговым отверстием, подкрепленным кольцом  $S_1$  из другого материала, наружный и внутренний радиусы которого –  $R_0, R_1$ . Материал кольца  $S_1$  обладает соответствующими деформационными характеристиками  $E_1, \nu_1$ . Граничные условия на линии контакта  $L_1$  кольца  $S_1$  и области  $S_{0,1}$  также отражают условия полного контакта, то есть условия непрерывности векторов смещений и полных напряжений.

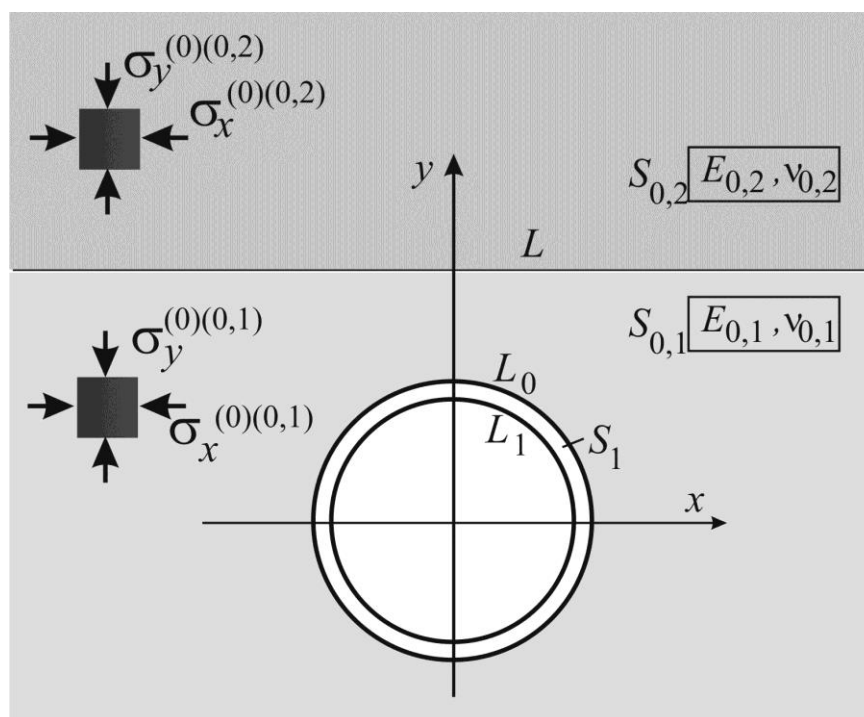


Рис. 1 – Расчетная схема

Решение поставленной задачи получено с применением теории аналитических функций комплексных переменных и метода Н.И. Мусхелишвили [7]. При этом с целью учета границы раздела  $L$  материалов предложен оригинальный прием, существенно упрощающий вывод разрешающих уравнений.

На первом этапе вводится декартова система координат  $xOy$ , начало которой помещается в центр отверстия (выработки). Направление действительной оси  $Ox$  задается параллельно границе раздела сред.

Действие собственного веса пород моделируется неравнокомпонентным полем начальных напряжений в полной плоскости  $S_{0,1}+S_{0,2}$ , компоненты которого определяются выражениями:

$$\sigma_x^{(0)(0,1)} = \sigma_x^{(0)(0,2)} = -\lambda\gamma H\alpha^*; \quad \sigma_y^{(0)(0,1)} = \sigma_y^{(0)(0,2)} = -\gamma H\alpha^*, \quad (1)$$

где  $\lambda$  - коэффициент бокового давления пород в ненарушенном массиве (принимается одинаковым в слоях  $S_{0,1}$  и  $S_{0,2}$ ),  $\gamma$  - усредненное значение удельного веса пород (также принимаемое для областей  $S_{0,1}$  и  $S_{0,2}$  одинаковым),  $H$  - глубина заложения выработки,  $\alpha^*$  - корректирующий множитель, с помощью которого осуществляется учет отставания возведения крепи от забоя [8].

Отметим, что накладываемые на величины  $\lambda, \gamma$  ограничения не являются принципиальными, но позволяют существенно упростить дальнейшее решение.

В кольце  $S_1$  начальные напряжения отсутствуют, то есть влияние собственного веса материала крепи не рассматривается.

Далее, согласно исследованиям И.В. Родина [9], полные напряжения в массиве (области  $S_{0,1}+S_{0,2}$ ) представляются в виде сумм начальных напряжений (1) и дополнительных напряжений, обусловленных проходкой выработки (образованием отверстия). Смещения рассматриваются только дополнительные.

Таким образом, граничные условия в поставленной задаче для дополнительных напряжений и смещений записываются в следующем виде:

- на  $L$

$$\sigma_y^{(0,1)} = \sigma_y^{(0,2)}, \quad \tau_{xy}^{(0,1)} = \tau_{xy}^{(0,2)}, \quad u_x^{(0,1)} = u_x^{(0,2)}, \quad u_y^{(0,1)} = u_y^{(0,2)}, \quad (2)$$

- на  $L_0$

$$\sigma_r^{(1)} = \sigma_r^{(0,1)} + \sigma_r^{(0)(0,1)}, \quad \sigma_\theta^{(1)} = \sigma_\theta^{(0,1)} + \sigma_\theta^{(0)(0,1)}, \quad \tau_{r\theta}^{(1)} = \tau_{r\theta}^{(0,1)} + \tau_{r\theta}^{(0)(0,1)}, \quad (3)$$

$$u_r^{(1)} = u_r^{(0,1)}, \quad u_\theta^{(1)} = u_\theta^{(0,1)},$$

- на  $L_0$

$$\sigma_r^{(1)} = 0, \quad \tau_{r\theta}^{(1)} = 0. \quad (4)$$

Здесь  $\sigma_y^{(0,1)}, \sigma_y^{(0,2)}, \tau_{xy}^{(0,1)}, \tau_{xy}^{(0,2)}$ , - координатные дополнительные напряжения;  $u_x^{(0,1)}, u_x^{(0,2)}, u_y^{(0,1)}, u_y^{(0,2)}$  - смещения в соответствующих областях  $S_{0,j}$  ( $j=1,2$ );  $\sigma_r^{(0,1)}, \sigma_\theta^{(0,1)}, \tau_{r\theta}^{(0,1)}, u_r^{(0,1)}, u_\theta^{(0,1)}$ , - соответственно, напряжения и смещения в нижней области  $S_{0,1}$  в полярной системе, начало которой совмещено с центром отверстия;  $\sigma_r^{(1)}, \tau_{r\theta}^{(1)}, u_r^{(1)}, u_\theta^{(1)}$  - напряжения и смещения в кольце  $S_1$  в той же полярной системе координат.

Введем в рассмотрение комплексные потенциалы Колосова - Мухелишвили [7] -  $\tilde{\Phi}_{0,j}(z), \tilde{\Psi}_{0,j}(z)$  ( $j=1,2$ ),  $\tilde{\Phi}_1(z), \tilde{\Psi}_1(z)$  - определяющие дополнительные напряжения и смещения в рассматриваемых областях  $S_{0,j}$  ( $j=1,2$ ), моделирующих массив, и в области  $S_1$ , моделирующей крепь выработки. При этом комплексные потенциалы  $\tilde{\Phi}_{0,j}(z), \tilde{\Psi}_{0,j}(z)$  будем представлять в виде

$$\tilde{\Phi}_{0,j}(z) = \Phi_{0,0}(z) + \Phi_{0,j}(z); \quad \tilde{\Psi}_{0,j}(z) = \Psi_{0,0}(z) + \Psi_{0,j}(z), \quad (5)$$

где  $\Phi_{0,0}(z), \Psi_{0,0}(z)$  - аналитические функции, регулярные в полной плоскости  $S_{0,1}+S_{0,2}$

вне отверстия и исчезающие на бесконечности (деформационные свойства рассматриваемой бесконечной области принимаются таким же, как в нижней среде  $S_{0,1}$ );  $\varphi_{0,j}(z)$ ,  $\psi_{0,j}(z)$  ( $j=1,2$ ) – функции, регулярные в соответствующих областях  $S_{0,j}$ , с помощью которых производится учет наличия границы раздела слоев с различными деформационными характеристиками – бесконечной прямой  $L$ .

После отнесения всех геометрических размеров к радиусу выработки  $R_0$  координаты точек  $t$ , принадлежащие границе  $L$ , будут определяться по формуле

$$t = x + ih, \quad (6)$$

где  $h = H/R_0$  – относительное расстояние от центра выработки до границы раздела слоев  $L$ .

В результате радиусы внутреннего и наружного контуров кольца будем представлять в безразмерной форме  $r_1 = R_1/R_0$  и, соответственно,  $r_0 = 1$ , а аффиксы точек  $t$ , принадлежащих контурам  $S_j$  ( $j=0, 1$ ) – в виде

$$t = \begin{cases} r_1\sigma & \text{на контуре } L_1, \\ \sigma & \text{на контуре } L_0, \end{cases} \quad \sigma = e^{i\theta} \text{ – точка единичной окружности.} \quad (7)$$

Таким образом, поставленную задачу теории упругости можно свести к краевой задаче теории аналитических функций комплексного переменного при граничных условиях, принимающих следующий вид [7]

– на границе  $L$ , разделяющей слои

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}_{0,2}(t) + t\overline{\tilde{\varphi}'_{0,2}(t)} + \overline{\tilde{\psi}_{0,2}(t)} &= \tilde{\varphi}_{0,1}(t) + t\overline{\tilde{\varphi}'_{0,1}(t)} + \overline{\tilde{\psi}_{0,1}(t)}; \\ \varkappa_{0,2}\tilde{\varphi}_{0,2}(t) - t\overline{\tilde{\varphi}'_{0,2}(t)} - \overline{\tilde{\psi}_{0,2}(t)} &= \frac{\mu_{0,2}}{\mu_{0,1}} \left[ \varkappa_{0,1}\tilde{\varphi}_{0,1}(t) - t\overline{\tilde{\varphi}'_{0,1}(t)} - \overline{\tilde{\psi}_{0,1}(t)} \right], \end{aligned} \quad (8)$$

– на наружном контуре  $L_0$  кольца

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}_1(\sigma) + \sigma\overline{\tilde{\varphi}'_1(\sigma)} + \overline{\tilde{\psi}_1(\sigma)} &= \tilde{\varphi}_{0,1}(\sigma) + \sigma\overline{\tilde{\varphi}'_{0,1}(\sigma)} + \overline{\tilde{\psi}_{0,1}(\sigma)} + f(\sigma); \\ \varkappa_1\tilde{\varphi}_1(\sigma) - \sigma\overline{\tilde{\varphi}'_1(\sigma)} - \overline{\tilde{\psi}_1(\sigma)} &= \frac{\mu_1}{\mu_{0,1}} \left[ \varkappa_{0,1}\tilde{\varphi}_{0,1}(\sigma) - \sigma\overline{\tilde{\varphi}'_{0,1}(\sigma)} - \overline{\tilde{\psi}_{0,1}(\sigma)} \right], \end{aligned} \quad (9)$$

– на внутреннем контуре  $L_1$  кольца

$$\tilde{\varphi}_1(r_1\sigma) + r_1\sigma\overline{\tilde{\varphi}'_1(r_1\sigma)} + \overline{\tilde{\psi}_1(r_1\sigma)} = 0. \quad (10)$$

Здесь использованы обозначения:

$$\varkappa_{0,j} = 3 - 4\nu_{0,j}, \quad \mu_{0,j} = \frac{E_{0,j}}{2(1 + \nu_{0,j})}, \quad \varkappa_1 = 3 - 4\nu_1, \quad \mu_1 = \frac{E_1}{2(1 + \nu_1)};$$

функция  $f(\sigma)$ , обусловленная действием начальных напряжений (1), определяется формулой

$$f(\sigma) = -\gamma HR_0 \alpha^* \left[ \frac{1+\lambda}{2} \sigma + \frac{1-\lambda}{2} \sigma^{-1} \right]. \quad (11)$$

Несложно заметить, что, если положить в расчетной схеме рассматриваемой задачи (см. рис. 1) деформационные свойства сред  $S_{0,j}(j=1,2)$  одинаковыми, то есть принять  $E_{0,1} = E_{0,2}$ ,  $\nu_{0,1} = \nu_{0,2}$ , условия (8) должны обратиться в тождества, из которых с учетом представлений (5) вытекают равенства:

$$\varphi_{0,j}(z) = 0 ; \psi_{0,j}(z) = 0 \quad (j=1, 2). \quad (12)$$

С другой стороны, принудительно вводя условие (12) в качестве первого приближения решения, мы приходим к известной задаче о напряженном состоянии упругой везомой плоскости, ослабленной подкрепленным круговым отверстием [8].

Комплексные потенциалы  $\varphi_{0,0}(z)$ ,  $\psi_{0,0}(z)$  в этом случае могут быть представлены в виде рядов:

$$\varphi_{0,0}(z) = \sum_{v=1}^{\infty} c_v^{(1)(0)} z^{-v} ; \psi_{0,0}(z) = \sum_{v=0}^{\infty} c_v^{(2)(0)} z^{-v} . \quad (13)$$

Далее, принимая во внимание представления (3) и применяя операции, аналогичные описанным в работе [8], в результате преобразования условий (5) можно прийти к выражениям для остальных искомым функций через потенциалы  $\varphi_{0,0}(z)$ ,  $\psi_{0,0}(z)$ , принимающим следующий вид:

$$\begin{aligned} \varphi_{0,1}(z) &= -\frac{d}{s} \left[ z\overline{\varphi'_{0,0}}(z-2ih) + \overline{\psi_{0,0}}(z-2ih) \right]; \\ \psi_{0,1}(z) &= -\frac{l}{n} \overline{\varphi_{0,0}}(z-2iH) - (z-2iH)\varphi'_{0,0}(z); \\ \varphi_{0,2}(z) &= d \left[ z\overline{\varphi'_{0,0}}(z-2ih) + \overline{\psi_{0,0}}(z-2ih) \right] + (s-1)\varphi_{0,0}(z); \end{aligned} \quad (14)$$

$\psi_{0,2}(z) = -(z-2ih)\varphi'_1(z) + l\overline{\varphi_{0,0}}(z-2ih) + (n-1) \left[ (z-2iH)\varphi'_{0,0}(z) + \psi_{0,0}(z) \right]$ , где использованы обозначения

$$s = \frac{1 + \frac{\mu_{0,2}}{\mu_{0,1}} \alpha_{0,1}}{\alpha_{0,2} + 1} ; d = \frac{1 - \frac{\mu_{0,2}}{\mu_{0,1}}}{\alpha_{0,2} + 1} ; l = \frac{\alpha_{0,2} - \frac{\mu_2}{\mu_1} \alpha_{0,1}}{\alpha_{0,2} + 1} ; n = \frac{\alpha_{0,2} + \frac{\mu_{0,2}}{\mu_{0,1}}}{\alpha_{0,2} + 1} . \quad (15)$$

В свою очередь, комплексные потенциалы, определяющие напряженно-деформированное состояние кругового кольца, представляются в виде [7]:

$$\varphi_1(z) = \sum_{v=1}^{\infty} c_v^{(1)(1)} z^{-v} + \sum_{v=0}^{\infty} c_v^{(3)(1)} z^v ; \psi_1(z) = \sum_{v=1}^{\infty} c_v^{(2)(1)} z^{-v} + \sum_{v=0}^{\infty} c_v^{(4)(1)} z^v . \quad (16)$$

Таким образом, выполнив подстановку выражений (13) в соотношения (14), а затем в условия (9), а также осуществив соответствующую подстановку представлений (16) в условия (9) и (10), используя методику, описанную в [10], решение поставленной задачи можно свести к отысканию шести групп неизвестных коэффициентов  $c_v^{(k)(j)}$  ( $v=0, \dots, \infty$ ), через которые выражаются все искомые потенциалы, определяющие напряженно-деформированное состояние рассматриваемых областей.

Процесс вычисления искомым коэффициентов в рядах после ограничения бесконечных рядов (13) до  $N$  членов можно представить в виде алгоритма, реализующего хорошо сходящийся итерационный процесс, первое приближение которого строится на ос-

нове выполнения условий (9), (10) и решении задачи для кругового кольца, подкрепляющего отверстие в бесконечной весомой плоскости. Найденные в первом приближении коэффициенты  $c_v^{(k)(0)}$  подставляются в формулы (13), (14), и процесс вычислений продолжается до тех пор, пока отличия в искомым коэффициентах, найденных в предыдущей и последующей итерациях, будут меньше наперед заданной малой величины, определяющей точность вычислений, например,  $10^{-6}$ . После вычисления искомым коэффициентов определяются потенциалы (13), (14), (16), а затем по формулам Колосова-Мусхелишвили – дополнительные напряжения и смещения в соответствующих областях, моделирующих массив, сложенный двумя типами пород и крепь. Далее вычисляются полные напряжения в областях  $S_{0,1}$ ,  $S_{0,2}$  (в массиве пород) путем суммирования найденных дополнительных напряжений с начальными напряжениями (1).

Описанное решение реализовано в виде полного алгоритма и компьютерной программы, позволяющей производить многовариантные расчеты с целью анализа напряженно-деформированного состояния крепи горной выработки и массива, сложенного двумя типами пород.

Несложно заметить, что в частном случае, приняв в качестве исходных данных  $E_1=0$ ,  $\nu_1=0,5$ , мы приходим к известному решению соответствующей задачи геомеханики для выработки мелкого заложения [11].

Ниже в качестве примера рассматриваются результаты определения напряженного состояния крепи и окружающего массива, сложенного двумя типами пород при следующих данных:  $R_1=1,8$  м;  $R_0=2,0$  м;  $H^*=2,2$  м;  $E_{0,1}=10000$  МПа;  $\nu_0=0,3$ ;  $E_{0,2}=1000$  МПа;  $\nu_0=0,4$ ;  $E_1=20000$  МПа;  $\nu_1=0,2$ ;  $\lambda=0,4$ . Для удобства вычисления проводились в безразмерной форме (в долях величины  $\gamma H \alpha^*$ ).

На рис. 2 представлены расчетные эпюры нормальных тангенциальных (окружных) напряжений на контурах крепи. При этом в силу симметрии рассматриваемой задачи результаты расчета даны для соответствующих половин сечений крепи. Для сравнения здесь же пунктирными линиями приведены результаты расчета (значения в скобках), выполненного без учета слоя ослабленных пород, то есть при задании  $E_{0,1} = E_{0,2} = 10000$  МПа;  $\nu_{0,1} = \nu_{0,2} = 0,3$  (очевидно, эти результаты можно воспроизвести, воспользовавшись методом расчета, изложенным в работе [6]).

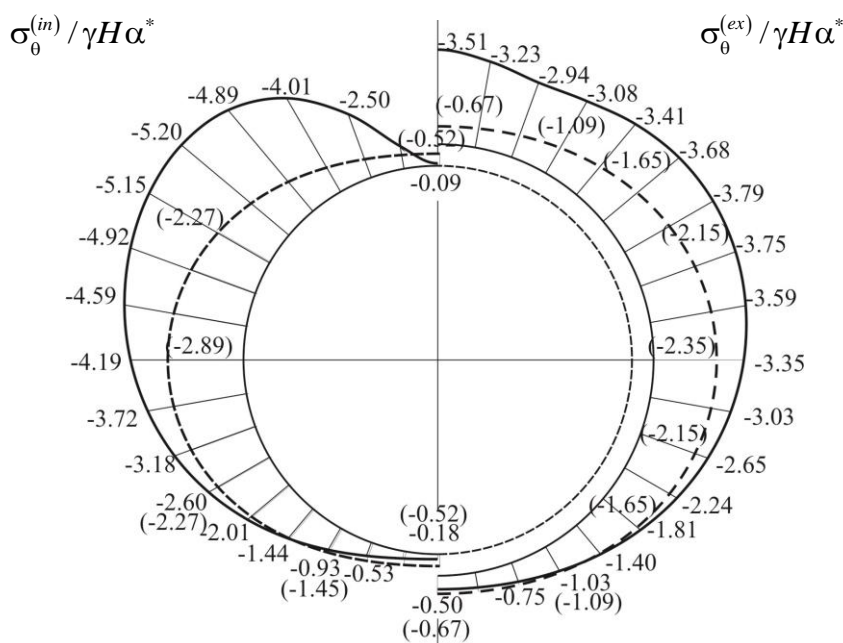


Рис. 2 – Расчетные эпюры нормальных тангенциальных напряжений на внутреннем  $\sigma_0^{(in)} / \gamma H \alpha^*$  и наружном  $\sigma_0^{(ex)} / \gamma H \alpha^*$  контурах крепи

Как следует из приведенных результатов, ослабленный слой пород, расположенный выше выработки, оказывает существенное влияние на напряжения в крепи, которые целесообразно учитывать при проектировании подземной конструкции.

Рассмотрим далее результаты компьютерного моделирования описанной задачи. Поскольку в изложенной постановке, предусматривающей разделение напряжений и смещений в массиве на начальные и дополнительные, в рамках стандартных программ, реализующих МКЭ, моделирование не представляется возможным, воспользуемся стандартным приемом моделирования объемных сил путем задания соответствующих напряжений (1) на границах модели. При этом размеры исследуемой области примем достаточно большими – 40 м по горизонтали и 30 м по вертикали, что существенно превышает рекомендуемые  $5R_0$ . Таким образом, прикладываемые на границах модели напряжения можно считать эквивалентными «нагрузкам на бесконечности», широко применяемым в геомеханике.

Изополюсы нормальных тангенциальных напряжений в крепи и в окрестности выработки представлены на рис. 3 (в процессе компьютерного моделирования принималось  $\gamma H \alpha^* = 1$  МПа).

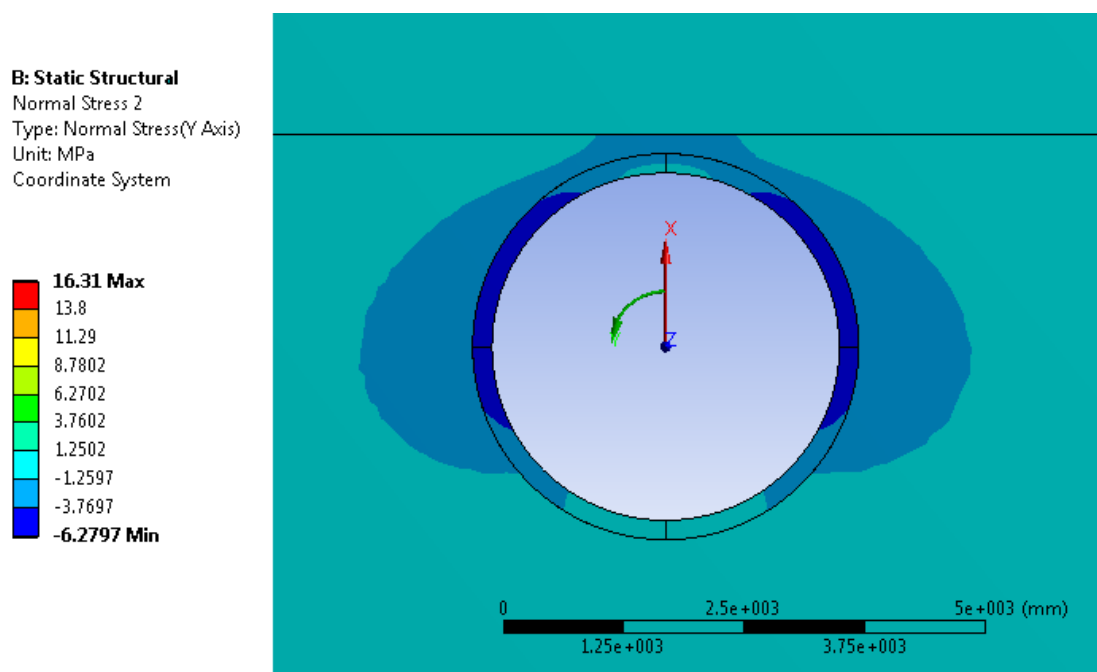


Рис. 3 – Изополюсы окружных напряжений  $\sigma_{\theta}$  в крепи и в массиве в окрестности выработки, построенные компьютерной программой МКЭ

Сравнивая результаты математического и компьютерного моделирования, приведенные на рис. 2 и 3, можно заключить, что они в целом согласуются. Ожидаемые расхождения обусловлены тем, что моделирование объемных сил с использованием методологии «сняемых напряжений» вскрывает дополнительный запас прочности конструкции порядка 15 – 20 % по сравнению с методом приложения «напряжений на бесконечности» (в рассмотренном примере отличие напряжений составляет  $\approx 17$  %).

В заключение отметим, что использованная компьютерная программа, реализующая МКЭ, позволяет осуществить моделирование дополнительных полей напряжений и смещений вокруг выработки в соответствии с условиями (2) – (4), но при условии гидростатического поля начальных напряжений, то есть при задании  $\lambda=1$  в выражениях (1). Сравнение результатов математического и компьютерного моделирования напряженного состояния крепи в этом частном случае показало, что различия не превышают 5 %.



## Литература

1. Саммаль А.С./ Аналитические методы расчета подземных сооружений / А.С. Саммаль, С.В. Анциферов, П.В. Деев. – Тула: Изд-во ТулГУ, 2013.– 115 с.
2. Zhaoa G.S. Analysis of stratum grouting influence on shaft lining stress with the methods of simulation and in site measurements / G.S Zhaoa, G.Q. Zhoua, G.R. Zhonga, F.P. Zhua, H.C. Lianga. Proc. Earth and Planetary Science 1 - 2009. – P. 497 - 502.
3. Strokova L.A. 2015. Karst hazard assessment in the design of the main gas pipeline (South Yakutia) / L.A. Strokova, E.M.Dutova, A.V.Ermolaeva, I.N.Alimova, A.B.Strelnikova. IOP Conference Series: Earth and Environmental Science. Vol. 27. 012032. - 2015. - P. 868 - 881.
4. Fotieva, N.N. Evaluation of opening stability with rocks technological heterogeneity being taken into account / N.N. Fotieva, A.S. Sammal. Proc. conference “Geomechanics 93”, Ostrava.- 1993. - P. 189 - 192.
5. Pleshko M.S., Stradanchenko S.G., Maslennikov S.A., Pashkova O.V. Study of technical solutions to strengthen the lining of the barrel in the zone of influence of construction near-wellbore production. ARPN Journal of Engineering and Applied Sciences. VOL. 10. № 1, January 2015. - P. 14 - 19.
6. Прокопов А.Ю. Технологические особенности проходки и крепления вертикальных стволов на участках нефтегазовых проявлений / А.Ю. Прокопов, В.Л. Склепчук // Горный информационно-аналитический бюллетень. - 2013. - № 11. - С. 137 – 145.
7. Мухелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости / Н.И. Мухелишвили. - М.: Наука, 1969. – 700 с.
8. Булычев Н.С. Механика подземных сооружений в примерах и задачах: Учеб. пособ. для вузов / Н.С. Булычев. – М.: Недра, 1989. – 270 с.
9. Родин И.В. К вопросу о решении задач гравитационного давления горных массивов на крепи подземных выработок / И.В. Родин // ДАН СССР. - 1951. - Т. 28. - № 3. – С. 121 – 132.
10. Решение задач геомеханики с применением теории аналитических функций комплексного переменного / А.С. Саммаль, С.В. Анциферов, П.В. Деев, И.Ю. Воронина. – Тула: Изд. ТулГУ, 2018. – 247 с.
11. Макаров В.В. Расчет обделок коллекторных тоннелей на действие внешнего гидростатического давления подземных вод с учетом влияния близости земной поверхности / В.В. Макаров // Механика подземных сооружений. - Тула: ТПИ, 1985. - С. 33 - 43.