

УДК 622:519.237.5

DOI: 10.25635/2313-1586.2018.04.061

**Антонов Владимир Александрович**

доктор технических наук,  
главный научный сотрудник,  
Институт горного дела УрО РАН,  
620075, г. Екатеринбург,  
ул. Мамина-Сибиряка, 58  
e-mail: [Antonov@igduran.ru](mailto:Antonov@igduran.ru)

**Antonov Vladimir A.**

Chief Research Worker,  
Doctor of Engineering,  
Institute of Mining UB RAS,  
620075, Ekaterinburg,  
Mamina-Sibiryaka str., 58  
e-mail: [Antonov@igduran.ru](mailto:Antonov@igduran.ru)

**ИЗВЛЕЧЕНИЕ  
МАТЕМАТИКО-СТАТИСТИЧЕСКИХ  
ЗАКОНОМЕРНОСТЕЙ  
В ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ  
ИССЛЕДОВАНИЯХ  
ГОРНО-ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ  
ПРОЦЕССОВ****DERIVING  
OF MATHEMATICAL-AND-STATISTICAL  
REGULARITIES IN EXPERIMENTAL  
RESEARCHES  
OF MINING-AND-TECHNOLOGICAL  
PROCESSES***Аннотация:*

Изложены основные положения методологии извлечения математико-статистических закономерностей в экспериментальных исследованиях горно-технологических процессов, основанной на их регрессионном функционально-факторном моделировании. Дана постановка математической задачи – отобразить в моделях закономерно детерминированную и случайную компоненты. В связи с этим описаны методические приемы оценок допустимой детерминации модели, формирования ее обобщенного вида, а также расчетов оптимальных коэффициентов и нелинейных функциональных параметров. Полученные после оптимизации модели проверяются статистически на адекватность извлекаемой закономерности и случайной погрешности проведенных экспериментов. Приведен практический пример моделирования, интерпретации выявленной закономерности и полученных новых знаний.

*Ключевые слова:* техногенное явление, эксперимент, модель регрессии, коэффициент детерминации, оптимизация, закономерность.

*Abstract:*

The main statements of the methodology for derivation of mathematical-and-statistical regularities in experimental mining-technological processes based on their regression functional-factorial modeling are outlined. The formulation of the mathematical problem mapping in models of a regularly determined and random component is given. In this connection, the methodical methods of estimating the permissible determination of the model, the formation of its generalized form, as well as the calculations of the optimal coefficients and nonlinear functional parameters are described. The models obtained after the optimization are checked statistically for the adequacy of the derived regularity and the random error of the fulfilled experiments. A practical example of modeling and of the interpretation of the revealed regularity and obtained new knowledge is given.

*Keywords:* technogenic phenomenon, experiment, regression model, coefficient of determination, optimization, regularity.

*Введение*

Математико-статистические закономерности становления и развития горно-технологических процессов извлекают чаще всего из их моделей, созданных на основе измерений соответствующих физических величин, параметров и показателей. Из-за влияния множества разных факторов и связей наблюдаемых техногенных явлений модели выражают сложными математическими функциями. В их структуре, кроме линейных коэффициентов, содержатся нелинейные параметры, которые следует не задавать априори, а определять расчетами с учетом характерных особенностей проведенного эксперимента. В исследованиях [1] показано, что такие модели создаются нелинейной функционально-факторной регрессией, методология построения которой развита в ИГД УрО РАН.

Отдельные положения методологии содержатся в работах [2 – 4]. Однако для конкретных представлений, как извлекать закономерность, этого недостаточно. В данной статье более подробно и последовательно излагается содержание методических приемов,

расчетных алгоритмов, а также реализующих их программных средств, приводящих к определенным результатам построения моделей, извлечению и интерпретации содержащихся в них закономерностей.

#### *Постановка задачи исследований*

В исследованиях учитывается, что количественная закономерность изменения зависимой величины  $Y$  техногенного явления – это математическое функциональное описание объективно существующих и регулярно повторяющихся в горно-технологических экспериментах значимых причинных ее связей с влияющими на нее независимыми величинами. Эти связи оцениваются в статистически доверительном интервале неизбежных (неустраняемых) случайных отклонений результатов экспериментальных измерений величины  $Y$ , выраженном среднеквадратичной погрешностью  $\sigma_3$ . Она объясняется неточностью средств измерений и случайным влиянием незначимых (второстепенных) явлений. Отсюда следует, что основная задача при поиске закономерности исследуемого явления заключается в создании его модели, в которой отдельно выделяются детерминированная (закономерная) и случайная компоненты. Очевидно, что закономерность можно извлечь из регрессионной модели лишь при условии адекватности среднеквадратичных погрешностей модели  $\sigma_p$  и эксперимента  $\sigma_3$ . Это обстоятельство приводит к соответствующему ограничению ее детерминации.

В связи с отмеченными замечаниями задача заключается в следующем. Экспериментальные измерения проведены дискретно в узловых точках. Каждая  $i$ -точка содержит  $s$  значений  $X_{is}$  независимых величин (аргументов) и значение  $Y_i$  зависимой от них величины техногенного явления, определенное с погрешностью  $\sigma_3$ . По положению узловых точек формируется модель  $Y = F(A, B, \xi, X)$ , описывающая это явление (исследуемый горно-технологический объект или процесс) и состоящая из одной или суммы нескольких функций  $f_q(\xi, X)$  с линейными коэффициентами  $A_q$ , а также постоянной составляющей  $B$ . Функции  $f_q(\xi, X)$  нелинейно зависят от содержащихся в них параметров  $\xi$ . Задача состоит в поиске коэффициентов  $A_{q0}$ ,  $B_0$  и функциональных параметров  $\xi_0$  в области определения функции  $F$ , сводящих сумму квадратов отклонений  $Y$  от  $Y_i$  в узловых точках к малому ограничению, доставляющему модели  $Y$  обусловленное допустимое значение целевой функции – коэффициента детерминации

$$R^2 = 1 - \frac{D_\Delta}{D_Y},$$

где  $D_Y$  – дисперсия значений  $Y_i$ ;  $D_\Delta$  – дисперсия отклонений  $Y$  от  $Y_i$  в узловых точках.

#### *Допустимый коэффициент детерминации*

Поскольку доверительные интервалы математического выражения модели должны соответствовать случайной погрешности эксперимента  $\sigma_3$ , то для их определения оцениваются по распределению Пирсона возможные вариации ее дисперсии, получаемые при повторных реализациях исследуемого явления (эксперимента). Вариации дисперсии учитываются в оценке требуемого коэффициента детерминации модели. Таким образом, рассчитываются с заданной вероятностью  $P$ , например  $P=0,95$ , нижняя  $R^2_n$  и верхняя  $R^2_b$  границы его допустимых значений в искомой модели по следующим формулам:

$$R^2_n = 1 - \frac{f \cdot \sigma_3^2}{\chi_{\alpha_1, f}^2 \cdot D_y} \quad \text{и} \quad R^2_b = 1 - \frac{f \cdot \sigma_3^2}{\chi_{\alpha_2, f}^2 \cdot D_y},$$

где  $f$  – число степеней свободы в оценке погрешности  $\sigma_3$ ;  $\chi_{\alpha_1, f}^2$  и  $\chi_{\alpha_2, f}^2$  – процентные точки распределения Пирсона на соответствующих уровнях значимости  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  ( $\alpha_1 = (1+P)/2$ ,  $\alpha_2 = (1-P)/2$ );  $D_y$  – дисперсия зависимой величины  $Y$  в узловых точках.

Если погрешность  $\sigma_3$  оценивается по данным текущего эксперимента, то число степеней свободы определяется количеством узловых точек. При заранее известном значении  $\sigma_3$ , достоверно определенном в посторонних испытаниях, число степеней свободы увеличивается, например,  $f=100$ .

#### *Формирование общего вида модели*

Перед формированием модели необходимо убедиться, что значения разных аргументов, заданные в экспериментах, не имеют тесной корреляционной связи между собой. Если такая связь обнаружена, то одни аргументы выражаются через другие и их количество уменьшается. Устанавливается также интервал их изменений в искомой модели, соответствующий экстраполяционному распространению величины  $Y$  согласно цели научного исследования. Общий вид модели формируется исследователем по его теоретическим представлениям о причинно-следственных связях явления и наблюдаемым феноменам, т.е. особенностям роста и спада распределения экспериментальных значений зависимой величины  $Y_i$ , направленного вдоль осей аргументов и под углом к ним. За основу построения принят функционально-факторный принцип, где под фактором понимается причина техногенного явления, влияющая на регрессию и определяющая ее характер или отдельные черты. Такой подход к построению модели принципиально отличается от установившейся и широко распространенной традиции линейной регрессии, где факторы формально отождествляются с аргументами. Действия факторов выражаются математическими функциями разной сложности. Их виды и количество устанавливаются, исходя из качественного объяснения, как аргументы влияют на регрессию. Модель с одним аргументом может быть многофакторной, т.е. содержать соответствующее количество функций, а однофакторная модель, состоящая из одной функции, может содержать несколько аргументов. Полученные таким образом модели наилучшим образом приближаются к данным экспериментов, становятся интерпретируемыми и пригодными для объяснения связей наблюдаемого явления.

#### *Расчет оптимальных коэффициентов и функциональных параметров.*

Коэффициенты  $A_{qo}$ ,  $B_o$  и параметры  $\xi_o$  модели, при которых целевая функция  $R^2$  находится в допустимом интервале от  $R^2_n$  до  $R^2_v$ , рассчитываются в процессе итераций совмещенными методами наименьших квадратов (МНК) и приближений параболической вершины (МППВ). В каждой итерации по значениям  $\xi$ , заданным в МППВ, и координатам  $(X_{is}, Y_i)$  экспериментальных узловых точек определяются соответствующие модельные функции  $f_{qi}(\xi_q, X_i)$  и по МНК оцениваются коэффициенты  $A_q$ ,  $B$ . Затем, с учетом полученного выражения модели, рассчитывается текущий коэффициент ее детерминации как функция  $R^2(\xi)$ .

Поиск оптимальных параметров  $\xi_o$  проводится в направлении роста функции  $R^2(\xi)$ . В аддитивных моделях, из-за взаимной перестановки функциональных параметров, она может иметь два или несколько одинаковых максимумов. Тогда расчеты проводятся в последовательно чередующихся сечениях  $R^2_i(\xi_j)$ , каждое из которых образуется путем задания в функции  $Y$ , а следовательно, и в  $R^2$ , фиксированных значений таким параметром, что в оставшихся  $\xi_j$  полученное сечение  $R^2_i$  содержит единственный глобальный максимум  $R^2_{iM}$ .

Суть расчетов МППВ в каждом (отдельно взятом) сечении состоит в многократно повторяющейся и уточняющейся аппроксимации экстремальной области  $m$ -мерной функции  $R^2_i(\xi_j)$  также  $m$ -мерной параболической функцией  $P(\xi_j)$ , имеющей единственный экстремум, условно названный вершиной. Аппроксимацию проводят по опорным точкам, принадлежащим обеим функциям  $R^2_i(\xi_j)$  и  $P(\xi_j)$ . В  $k$ -приближении итерационного процесса параболическая функция  $P_k$  представляется в следующем виде:

$$P_k = C_k + \sum_{j=1}^m (C_{j1k} \xi_j + C_{j2k} \xi_j^2),$$

где  $\xi_j$  – оптимизируемые параметры;  $C_k, C_{j1k}, C_{j2k}$  – коэффициенты. Индекс  $j$  пробегает значения от 1 до  $m$  – количества функциональных параметров в сечении, а индекс  $v$  обозначает номер опорной точки и изменяется от 1 до  $2m+1$ . Каждая опорная точка задается параметрами  $\xi_{jv}$  и зависимым от них значением  $R^2_v$ .

На старте, в области предварительной локализации максимума функции  $R^2_i$ , выбирается положение первой ( $v=1$ ) опорной точки ( $\xi_{j1}, R^2_1$ ). Стартовое положение остальных опорных точек с номерами  $v > 1$  задается по следующему правилу перекрестка. Параметры опорных точек с номерами  $1 < v < 2j$  и  $2j+1 < v \leq 2m+1$  тоже принимают значения центра. Опорные точки с номерами  $2j$  и  $2j+1$  смещаются по  $j$ -параметру от центра в двух противоположных направлениях на интервал  $|\Delta \xi_j|$ . Координаты точек с номерами  $v=2j$  выражаются разностью  $\xi_{jv} = \xi_{j1} - |\Delta \xi_j|$ , а с номерами  $v=2j+1$ , соответственно, суммой  $\xi_{jv} = \xi_{j1} + |\Delta \xi_j|$ . Сечения параболической функции, проведенные вдоль каждого  $j$ -аргумента через центр полученного перекрестка по трем опорным точкам с координатами  $\xi_{j1} - |\Delta \xi_j|, \xi_{j1}, \xi_{j1} + |\Delta \xi_j|$ , представляют собой вогнутые параболы, расположенные во взаимно перпендикулярных плоскостях. В условиях неравенств  $C_{j2} < 0$  они имеют общий максимум, совпадающий с максимумом параболической функции. Координаты опорных точек, установленные по данному правилу, приведены в табл. 1.

Таблица 1

**Координаты опорных точек, установленные по правилу перекрестка**

$v \backslash \xi_{jv}$	$\xi_{1v}$	$\xi_{2v}$	$\xi_{3v}$	...	$\xi_{mv}$
1	$\xi_{11}$	$\xi_{21}$	$\xi_{31}$	...	$\xi_{m1}$
2	$\xi_{11} -  \Delta \xi_1 $	$\xi_{21}$	$\xi_{31}$	...	$\xi_{m1}$
3	$\xi_{11} +  \Delta \xi_1 $	$\xi_{21}$	$\xi_{31}$	...	$\xi_{m1}$
4	$\xi_{11}$	$\xi_{21} -  \Delta \xi_2 $	$\xi_{31}$	...	$\xi_{m1}$
5	$\xi_{11}$	$\xi_{21} +  \Delta \xi_2 $	$\xi_{31}$	...	$\xi_{m1}$
6	$\xi_{11}$	$\xi_{21}$	$\xi_{31} -  \Delta \xi_3 $	...	$\xi_{m1}$
7	$\xi_{11}$	$\xi_{21}$	$\xi_{31} +  \Delta \xi_3 $	...	$\xi_{m1}$
...	...	...	...	...	...
$2m$	$\xi_{11}$	$\xi_{21}$	$\xi_{31}$	...	$\xi_{m1} -  \Delta \xi_m $
$2m+1$	$\xi_{11}$	$\xi_{21}$	$\xi_{31}$	...	$\xi_{m1} +  \Delta \xi_m $

Интервал  $|\Delta \xi_j|$  в стартовом состоянии опорных точек назначается намного меньшим, чем размер области локализации. Используя координаты опорных точек перекрестка, рассчитывают по формуле  $\xi_{jB} = -C_{j1}/2C_{j2}$  совокупность вершинных параметров  $\xi_{jB}$  параболической функции. Согласно ее выражению получается следующая система  $2m+1$  линейных уравнений:

$$\begin{aligned}
 R^2_1 &= C + C_{11}\xi_{11} + C_{12}\xi_{11}^2 + C_{21}\xi_{21} + C_{22}\xi_{21}^2 + \dots + C_{m1}\xi_{m1} + C_{m2}\xi_{m1}^2 \\
 R^2_2 &= C + C_{11}\xi_{12} + C_{12}\xi_{12}^2 + C_{21}\xi_{22} + C_{22}\xi_{22}^2 + \dots + C_{m1}\xi_{m2} + C_{m2}\xi_{m2}^2 \\
 &\dots \\
 R^2_{2m+1} &= C + C_{11}\xi_{1(2m+1)} + C_{12}\xi_{1(2m+1)}^2 + C_{21}\xi_{2(2m+1)} + C_{22}\xi_{2(2m+1)}^2 + \dots + C_{m1}\xi_{m(2m+1)} + C_{m2}\xi_{m(2m+1)}^2.
 \end{aligned}$$

Ее решения  $C_{j1}$ ,  $C_{j2}$  определяются правилом Крамера. Расчет проводится по формуле  $\xi_{jB} = -\Delta_{j1}/2\Delta_{j2}$ , где  $\Delta_{j1}$ ,  $\Delta_{j2}$  – определители, получаемые из определителя,

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & \xi_{11} & \xi_{11}^2 & \xi_{21} & \xi_{21}^2 & \dots & \xi_{m1} & \xi_{m1}^2 \\ 1 & \xi_{12} & \xi_{12}^2 & \xi_{22} & \xi_{22}^2 & \dots & \xi_{m2} & \xi_{m2}^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \xi_{1(2m+1)} & \xi_{1(2m+1)}^2 & \xi_{2(2m+1)} & \xi_{2(2m+1)}^2 & \dots & \xi_{m(2m+1)} & \xi_{m(2m+1)}^2 \end{vmatrix}$$

путем замены соответствующего столбца  $\xi_{j1}$  или  $\xi_{j1}^2$  столбцом  $R^2_v$ .

Принимая вершинные параметры  $\xi_{jB}$  и рассчитанное с их учетом значение функции  $R^2_B(\xi_{jB})$ , получают новую опорную точку. После этого действуют по следующим вариантам.

1. Получено значение  $R^2_B$  меньше или равно наименьшему  $R^2_{vM}$  в опорных точках перекрестка. Среди их номеров  $v > 1$  найдется точка с наибольшим  $R^2_v$ , таким, что  $R^2_v > R^2_1$ . Этой точке присваивается номер 1, и вокруг нее строится новый перекресток, т.е. он переносится на интервал  $|\Delta \xi_j|$  в направлении роста  $R^2_i$ .

2. Получено значение  $R^2_B$  больше  $R^2_v$  хотя бы одной опорной точки. Тогда точку с наименьшим значением  $R^2_{vM}$  заменяют новой опорной точкой.

В каждом следующем  $k$ -приближении по координатам опорных точек рассчитывают вершинные аргументы  $\xi_{jBk}$  и соответствующее значение  $R^2_{Bk}$  вновь образованной опорной точки.

В приближении  $k+1$  действуют по следующим условиям.

Если  $R^2_{Bk}$  превышает  $R^2_v$  хотя бы одной опорной точки, то заменяют одну из опорных точек с наименьшим значением  $R^2_{vM}$  новой опорной точкой. Если  $R^2_{Bk}$  равно или меньше наименьшего из  $R^2_v$ , то итерации временно останавливают и проводят коррекцию координат опорных точек.

Коррекция заключается в установке опорных точек по тому же правилу перекрестка, но с учетом достигнутого на момент коррекции оптимизационного приближения. Теперь центром перекрестка считается единственная сохраняемая опорная точка, имеющая наибольшее значение  $R^2_v$ . Ей присваивается номер  $v=1$ . Остальные опорные точки смещаются относительно центра по направлению  $j$ -параметра на интервал  $|\Delta \xi_{jk}|$ :

$$|\Delta \xi_{jk}| = \frac{1}{2m+1} \sum_{v=1}^{v=2m+1} |\xi_{jv k} - \xi_{jvk}|,$$

который является усредненным текущим отклонением параметров опорных точек  $k$ -приближения от их взвешенного центра. Его  $j$ -координата  $\xi_{jvk}$  определяется выражением

$$\xi_{jvk} = \frac{\xi_{j1k} R_{1k}^2 + \xi_{j2k} R_{2k}^2 + \dots + \xi_{j(2m+1)k} R_{(2m+1)k}^2}{R_{1k}^2 + R_{2k}^2 + \dots + R_{(2m+1)k}^2}.$$

Далее итерации возобновляются по указанному выше порядку перемещения перекрестка или отдельных опорных точек. Такие расчеты в отдельном сечении коэффициента детерминации продолжаются, пока не замедлится рост  $R^2_i$ . После этого переходят к другому (следующему) сечению. При этом сходимость расчетов МППВ обусловлена совокупностью целевых процедур. Первая опорная точка перекрестка в процессе его коррекции или перемещения всегда устанавливается в координатах, имеющих наибольшее значение  $R^2_v$  текущего приближения. Во всех итерациях наименьшее значение  $R^2_{vM}$  заменяется вершинным, таким, что  $R^2_B > R^2_{vM}$ . Поэтому с увеличением количества итераций значения функции  $R^2_i$  в опорных точках сечения дискретно возрастают. Область перемещения опорных точек уменьшается, они концентрируются, и качество аппроксимации

области экстремума функции  $R^2_i$  вершиной параболической функции улучшается. Параметры  $\xi_{1vk}, \xi_{2vk}, \dots, \xi_{mvk}$ , рассчитанные по вершине параболической функции, все меньше отличаются от совокупности искомым параметров, соответствующих заданному интервалу коэффициента детерминации  $R^2$ .

Достаточность приближений  $\xi_j$  при последовательной смене сечений до оптимальных значений  $\xi_0$  – совокупности функциональных параметров регрессионной модели в области рациональных чисел (положительных, отрицательных, дробных) и следующих за ними значений  $A_{q0}, B_0$  определяется критерием статистической адекватности модели, выражаемым неравенством

$$R^2_n < R^2_i(\xi_{j0}) < R^2_B.$$

В связи с числом оптимизируемых функциональных параметров различаются обозначения методик (М) соответствующих расчетов с указанием количества опорных точек (3Т, 5Т, 7Т...) и решаемых линейных уравнений. Обозначения и содержание некоторых методик показаны в табл. 2.

Таблица 2

Обозначение методик оптимизации

Обозначение методики	М3Т	М5Т	М7Т	М9Т	М11Т
Количество определяемых параметров	1	2	3	4	5
Количество опорных точек	3	5	7	9	11

*Структура расчетов в программе «Microsoft Excel»*

Расчет коэффициентов и функциональных параметров модели в формате Excel проводят в трех взаимосвязанных модулях. Это модули модели, расчетов МНК и расчетов МППВ.

Модуль модели содержит столбцы узловых точек эксперимента со значениями  $X_{is}, Y_i$ , функциональных параметров  $\xi$  и образованных от них функций  $f_{qi}$  и  $f_{qi}^2$ , а также коэффициентов  $A_q$  и  $B$ . Здесь же размещаются столбцы парных произведений  $Yif_{qi}$  и сочетающихся модельных функций. Выделяется ячейка, в которой рассчитывается коэффициент детерминации модели.

В модуле МНК проводится расчет коэффициентов  $A_q$  и  $B$  с использованием определителей квадратных матриц, сформированных по системе соответствующих линейных уравнений. Элементы для составления матриц передаются из модуля модели. Это средние значения функций  $\overline{f_q}, \overline{f_q^2}, \overline{Yf_q}, \overline{Y}$ , а также парных произведений  $q$ -функций, рассчитанные по выборке узловых точек. Размер матриц задается количеством линейных коэффициентов. Матрица определителя  $\Delta$  однородной системы и столбец свободных членов  $Yf_q$ , соответствующие модели  $Y = \sum_{q=1}^l A_q f_q(\xi_q, X) + B$ , представляются в следующем виде:

Матрица определителя  $\Delta$  однородной системы и столбец свободных членов  $Yf_q$ , соответствующие модели  $Y = \sum_{q=1}^l A_q f_q(\xi_q, X) + B$ , представляются в следующем виде:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \overline{f_1^2} & \overline{f_1 f_2} & \overline{f_1 f_3} & \dots & \overline{f_1 f_l} & \overline{f_1} \\ \overline{f_2 f_1} & \overline{f_2^2} & \overline{f_2 f_3} & \dots & \overline{f_2 f_l} & \overline{f_2} \\ \overline{f_3 f_1} & \overline{f_3 f_2} & \overline{f_3^2} & \dots & \overline{f_3 f_l} & \overline{f_3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \overline{f_l f_1} & \overline{f_l f_2} & \overline{f_l f_3} & \dots & \overline{f_l^2} & \overline{f_l} \\ \overline{f_1} & \overline{f_2} & \overline{f_3} & \dots & \overline{f_l} & 1 \end{vmatrix}; \quad Yf_q = \begin{vmatrix} \overline{Yf_1} \\ \overline{Yf_2} \\ \overline{Yf_3} \\ \dots \\ \overline{Yf_l} \\ \overline{Y} \end{vmatrix}.$$

Расчет коэффициентов проводится по правилу Крамера:

$$A_q = \frac{\Delta_q}{\Delta}; \quad B = \frac{\Delta_B}{\Delta},$$

где  $\Delta_q$ ,  $\Delta_B$  – определители, получаемые из  $\Delta$  после замены соответствующих  $q$ ,  $B$ -столбцов столбцом свободных членов. Если в модели коэффициент  $B$  отсутствует, то исключаются в матрице определителя нижняя строка и правый столбец, а в столбце свободных членов – нижний элемент  $\bar{Y}$ . Рассчитанные значения линейных коэффициентов  $A_q$  и  $B$  передаются в модуль модели.

В названии модулей МНК проставляется через тире размер матрицы определителя и обозначения линейных коэффициентов. Например, в модуле МНК-ЗАВ определителями третьего порядка рассчитываются коэффициенты  $A_1$ ,  $A_2$  и свободный член  $B$ . В модуле МНК-4А определителями четвертого порядка рассчитываются коэффициенты  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A_3$ ,  $A_4$ .

Расчет параметров  $\xi$  проводится в одном или последовательно чередующихся нескольких модулях МППВ в соответствии с их разбивкой на группы  $\xi_j$ , унимодальных сечений  $R^2_i$ . Каждый модуль расчета МППВ содержит таблицу координат опорных точек  $(\xi_{jv}, R^2_{jv})$ , устанавливаемых по правилу перекрестка. При этом параметры  $\xi_{jv}$  опорной точки передаются в модуль модели, который в ответ возвращает значение  $R^2_{jv}$ . В таком же порядке формируется интерактивная таблица, в которой фиксируются изменения  $\xi_{jv}$  и  $R^2_{jv}$ , происходящие в процессе итераций, а также вследствие расчета координат новой опорной точки, проводимого по приведенным выше уравнениям.

Значения  $R^2_{jv}$  опорных точек, в том числе образованной по вершине параболической функции, сравниваются численно, а также наблюдаются визуально на диаграмме. По результатам сравнения согласно приведенному выше алгоритму МППВ в каждой итерации принимается решение о соответствующем действии в продвижении расчетов (замена опорных точек, перенос или коррекция их перекрестка).

Названия модулей соответствуют обозначениям методик МППВ в табл. 2.

#### *Проверка модели на содержание закономерности*

Выражение регрессионной модели, полученное после оптимизации ее коэффициентов и функциональных параметров, проверяется на адекватность искомой закономерности. Основным критерием является соответствие коэффициента ее детерминации  $R^2$  допустимому интервалу от  $R^2_n$  до  $R^2_b$ . Наиболее достоверная закономерность содержится в математическом выражении модели, коэффициент детерминации которой ближе к середине обозначенного интервала. Невыполнение данного критерия снизу ( $R^2 < R^2_n$ ) свидетельствует о недостаточном учете значимых (закономерных) факторов исследуемого явления. Общий вид модели следует дополнить их функциями. Невыполнение данного критерия сверху ( $R^2 > R^2_b$ ) указывает на избыточный учет факторов в числе незначимых (случайных). Тогда их функции надо исключить из общего вида модели.

По дополнительному критерию оценивается обоснованность статистически доверительного интервала случайных отклонений модели от ее детерминированной части, выраженного среднеквадратичной погрешностью. Для этого проверяется наличие свойств нормальных и гомоскедастических отклонений модели  $Y$  от данных эксперимента  $Y_i$ . При положительных результатах отмеченных испытаний признается, что математическая формула модели выражает искомую закономерность.

#### *Оценка новых знаний*

Интерпретация закономерностей в описании связей зависимой величины  $Y$  приводит к новым научным знаниям об исследуемом горно-технологическом процессе. Они оцениваются в результате смыслового толкования ее модельных изменений, происходящих

на разных стадиях становления и развития наблюдаемого техногенного явления, с указанием найденных значений функциональных параметров  $\xi_{j_0}$ , и коэффициентов  $A_{q_0}$ ,  $B_0$ , характеризующих их локальные особенности.

Так по математическому выражению закономерности оцениваются формы и размеры исследуемых объектов, координаты минимума или максимума зависимой величины, положение ее изолиний, выбранных по какому-либо критерию. По функциям показательным определяются интервалы релаксации величины  $Y$ , а степенным – показатели степени, выражающие крутизну роста или спада зависимой величины по направлениям разных аргументов и на отдельных стадиях техногенного явления. Дается толкование линейным коэффициентам – селективным масштабным множителям  $A_{q_0}$ , а также границе  $B_0$  асимптотических приближений.

### *Практическое применение*

Знания, полученные в результате интерпретации количественных закономерностей, позволяют достоверно судить о пространственных, временных и других изменениях наиболее важных параметров и показателей технологических процессов, происходящих под воздействием влияющих факторов. Это дает возможность уверенно планировать и прогнозировать, а также обоснованно принимать управляющие решения по выбору наиболее эффективных режимов ведения горных работ. Так по извлеченным закономерностям решаются геоинформационные, технологические, геофизические, экономические и другие исследовательские задачи горного производства.

В качестве практического примера приведем результаты экспериментальных исследований изменения зависимой удельной экономической прибыли  $\Pi$ , получаемой от подземной добычи 1 т кварцевого сырья [5]. На прибыль влияют независимые технологические параметры комплексной системы разработки: мощность  $m$  рудного тела и угол  $\alpha$  его падения. Ставится цель исследований – извлечь по данным экспериментальных оценок математико-статистическую закономерность изменения прибыли и, используя ее, определить ограничение мощности рудного тела, при которой добыча кварцевого сырья не убыточна, т.е. выполняется неравенство  $\Pi > 0$ .

В исследованиях проведена экспериментальная оценка прибыли  $\Pi_i$  путем ее технологических расчетов в 25 узловых точках, имеющих разные фиксированные значения  $m_i$ ,  $\alpha_i$  аргументов. Мощность рудного тела задавалась в интервале от 4 до 20 м с шагом 4 м, а угол его падения от 20 до 40° с шагом 5°. Среднеквадратичная погрешность таких оценок составляет 18 руб/т. Распределение экспериментальных значений прибыли в координатах  $m$ ,  $\alpha$  показано на рис. 1а. Обобщение и толкование их связей проведено путем формирования и анализа соответствующей модели нелинейной функционально-факторной регрессии.

Предварительно, в соответствии с требованиями адекватности моделируемой прибыли, на уровне доверительной вероятности 0,95, оценен допустимый интервал коэффициента детерминации искомой модели. С учетом количества точек дискретных расчетов прибыли и их погрешности данный интервал ограничен нижним и верхним значениями, соответственно,  $R^2_{н}=0,990$  и  $R^2_{в}=0,999$ .

Общий вид модели сформирован, исходя из теоретических представлений образования прибыли и особенностей ее распределения в экспериментальных оценках. Очевидно, что с ростом мощности рудного тела удельная себестоимость добычи кварцевого сырья уменьшается, а прибыль, соответственно, возрастает. Объясняя наблюдаемую в экспериментальных точках вогнутость такого возрастания неравномерным снижением себестоимости добычи, выразим его экспонентой  $e^{-\frac{m}{\lambda}}$ , ограниченной пределом  $B$ . Отмечая незначительное и монотонное изменение экспериментальных значений прибыли в направлении, расположенном под углом к осям  $m$ ,  $\alpha$ , выразим его произведением степенной



функции  $\alpha^\mu$  и упомянутой экспоненты. С учетом отмеченных особенностей представим модель изменения прибыли в следующем обобщенном виде:

$$\Pi = A_1 e^{-\frac{m}{\lambda}} + A_2 \alpha^\mu e^{-\frac{m}{\lambda}} + B.$$

Здесь расчет оптимальных линейных коэффициентов  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $B$  проведен модулем МНК-ЗАВ. Функциональные параметры  $\mu$  и  $\lambda$  рассчитаны МППВ с привлечением модуля М5Т-1. Модель, полученную по итогам оптимизации и распространенную в доверительном интервале ее случайной среднеквадратичной погрешности 17,7 руб/т представим в конкретной математико-статистической форме:

$$\Pi = (785,6 \alpha^{0,23} - 4632,2) e^{-\frac{m}{4,1}} + 592,6 \pm 17,7.$$

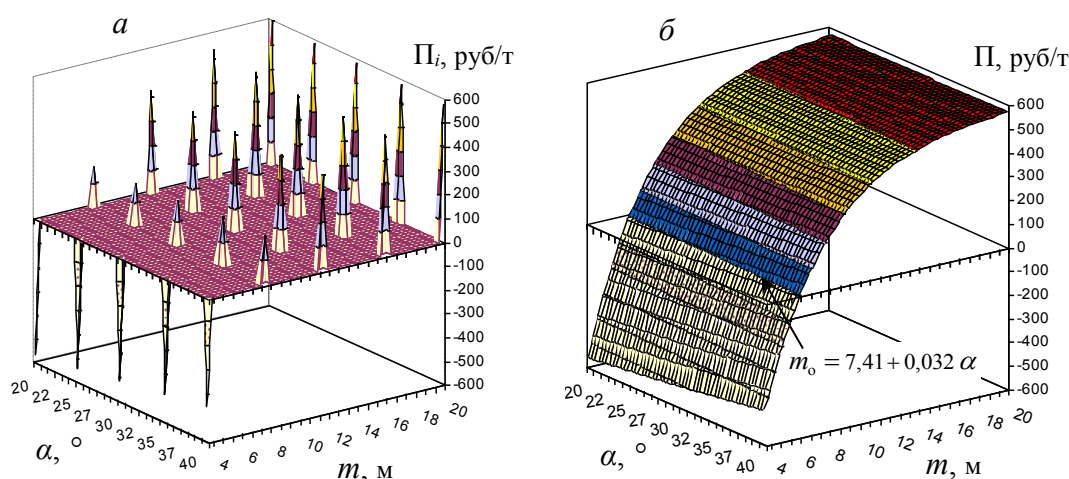


Рис. 1 – Распределение удельной прибыли от добычи кварцевого сырья, полученной по результатам экспериментальных оценок (а) и моделирования (б)

Графический вид модели  $\Pi$  показан на рис. 1б. Коэффициент ее детерминации 0,998 входит в допустимый интервал. Отклонения модели от экспериментальных значений прибыли  $\Pi_i$  обладают свойствами нормального распределения и гомоскедастичности. Таким образом, она описывает изменение прибыли, получаемой от добычи кварца, адекватно погрешности исходных экспериментальных оценок, т. е. статистически достоверна, и в указанном доверительном интервале выражает искомую закономерность.

Из математического выражения закономерности получаем следующие знания. По мере роста мощности рудного тела прибыль существенно увеличивается вогнуто, приближаясь к асимптотическому значению  $B=592,6$  руб/т по экспоненте с длиной релаксации  $\lambda=4,1$  м. Под влиянием угла падения рудного тела прибыль изменяется незначительно по степенной функции с малым показателем 0,23. Имеется область с отрицательными значениями прибыли, обозначающими убыточную добычу кварцевого сырья. Связанное с этим ограничение мощности рудного тела, при котором добыча кварцевого сырья не убыточна ( $\Pi > 0$ ), выражается неравенством  $m > m_0$ , где  $m_0$  – положение изолинии нулевой прибыли, показанное на рис. 1б.

#### Заключение

Из представленных положений методологии следует обоснованный вывод, что последовательное их выполнение, как показано в приведенном примере, приводит к формированию математико-статистической модели исследуемого горно-технологического процесса, из которой в обусловленном интервале нормальных случайных отклонений извлекается соответствующая закономерность изменения зависимой величины. Чем

меньше погрешность эксперимента и случайных отклонений в модели, тем с большей достоверностью извлекается закономерность.

Толкование ее математического выражения приводит к основной цели научных исследований – знаниям об углубленных связях геолого-технологических, экономических и других параметров горного техногенного явления, определяющих его становление и развитие.

### Литература

1. Антонов В.А. Построение и оптимизация моделей нелинейной функционально-факторной регрессии / В.А. Антонов // Информационные технологии. – 2013. – № 5. – С. 17 – 24.
2. Антонов В.А. Методология геоинформационного отображения экспериментальных горно-технологических закономерностей / В.А. Антонов // Горный информационно-аналитический бюллетень. – 2017. – № 10. – С. 17 – 24.
3. Антонов В.А. Метод нелинейной функционально-факторной регрессии в экспериментальных горно-технологических исследованиях / В.А. Антонов // Горный информационно-аналитический бюллетень. – 2017. – № 10, Спец. вып. 23. – С. 90 – 98.
4. Антонов В.А. Выявление и интерпретация экспериментальных горно-технологических закономерностей / В.А. Антонов // Проблемы недропользования. – 2016. – № 4. – С. 162 – 169. DOI:10.18454/2313-1586.2016.04.162
5. Антонов В.А. Исследование экономической прибыли при освоении кварцевого месторождения / В.А. Антонов, И.В. Соколов, К.В. Барановский // Известия ТулГУ. Науки о Земле. – 2018. – Вып. 2 – С. 379 – 388.