

УДК 622.831:004.942

**Анциферов Сергей Владимирович**

доктор технических наук,  
заведующий кафедрой механики материалов,  
Тульский государственный  
университет,  
300012, г. Тула, пр. Ленина 92  
e-mail: [antsser@mail.ru](mailto:antsser@mail.ru)

**Кудрявцев Максим Александрович**

аспирант,  
младший научный сотрудник  
кафедры механики материалов,  
Тульский государственный университет  
e-mail: [maks.kudravtcev@yandex.ru](mailto:maks.kudravtcev@yandex.ru)

### **О НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОМ СОСТОЯНИИ МАССИВА ПОРОД ВОКРУГ ВЫРАБОТКИ, РАСПОЛОЖЕННОЙ ВБЛИЗИ ГОРНОГО СКЛОНА**

*Аннотация:*

Разработана математическая модель формирования напряженно-деформированного состояния массива пород вокруг горной выработки кругового поперечного сечения, сооруженной закрытым способом вдоль склона в непосредственной близости от наклонной земной поверхности. В основу предлагаемой модели положены теоретические положения и гипотезы геомеханики и механики сплошных сред, позволяющие использовать современные представления механики подземных сооружений о совместной работе элементов единой деформируемой системы "склон – массив пород – горная выработка". Расчетные схемы модели позволяют учесть влияние основных физико-механических и геометрических факторов при действии статических нагрузок – собственного веса пород и внутреннего напора. Поскольку рассматриваются участки достаточно протяженных выработок, использованы постановки плоских задач теории упругости для полубесконечной среды, ослабленной вблизи прямолинейной границы круговым отверстием при соответствующих граничных условиях. Строгие решения поставленных задач теории упругости получены с использованием математического аппарата теории функций комплексного переменного – комплексных потенциалов Колосова – Мусхелишвили, характеризующих напряженно-деформированное состояние полуплоскости, аналитического продолжения комплексных потенциалов через границу полуплоскости, теоремы Сохоцкого – Племяля, свойств интегралов типа Коши, рядов Лорана и модифицированного метода Арамановича. Решения реализованы в виде алгоритмов расчета и компьютерных программ, позволяющих выполнять многовариантные расчеты при проектировании подземных сооружений и выполнении научных исследований. Результаты расчетов могут быть использованы для оценки устойчивости склона на основе применения условия прочности Кулона – Мора, сравнения и оценки результатов определения напряженно-деформированного состояния массива пород вокруг выработки в склоне численными методами, в том числе МКЭ. Приводятся расчетные эпюры напряжений.

*Ключевые слова:* массив горных пород, незакрепленная выработка, собственный вес пород, полуплоскость, круговое отверстие, внутреннее давление, напряжения, теория функций комплексного переменного.

DOI: 10.25635/2313-1586.2022.02.063

**Antsiferov Sergey V.**

Doctor of Technical Sciences,  
Head of the Department of mechanics of materials,  
Tula State University,  
300012 Tula, 92 Lenin Av.  
e-mail: [antsser@mail.ru](mailto:antsser@mail.ru)

**Kudryavtsev Maxim A.**

postgraduate student,  
Junior Researcher,  
Department of mechanics of materials,  
Tula State University,  
e-mail: [maks.kudravtcev@yandex.ru](mailto:maks.kudravtcev@yandex.ru)

### **ON THE STRESS-STRAIN STATE OF THE ROCK MASS AROUND THE EXCAVATION LOCATED NEAR A ROCK SLOPE**

*Abstract:*

A mathematical model has been developed for the formation of the stress-strain state of a rock mass around a circular cross-section mining mine constructed in a closed manner along a slope in close proximity to the inclined earth's surface. The proposed model is based on theoretical propositions and hypotheses of geomechanics and continuum mechanics, which allow us to use modern ideas of mechanics of underground structures about the joint work of elements of a single deformable system "slope – rock mass – mining". The design schemes of the model allow us to take into account the influence of the main physical, mechanical and geometric factors under the action of static loads – such as the own weight of rocks and internal pressure. Since the sections of sufficiently extended workings are considered, the statements of plane problems of elasticity theory for a semi-infinite medium weakened near a rectilinear boundary by a circular hole under appropriate boundary conditions are used. Rigorous solutions to the problems of elasticity theory were obtained using the mathematical apparatus of the theory of functions of a complex variable, Kolosov – Muskhelishvili complex potentials, characterizing the stress-strain state of the half-plane, the analytical continuation of complex potentials across the boundary of the half-plane, the Sokhotsky – Plemel theory, the properties of Cauchy-type integrals, Laurent series and the modified Aramanovich method. The solutions are implemented in the form of design algorithms and computer programs that allow performing multivariate calculations when design underground structures and performing scientific research. The results of the design can be used to assess the stability of the slope based on the application of the Coulomb – Mohr strength condition, comparison and evaluation of the results of determining the stress-strain state of the rock mass around the workings in the slope by numerical methods, including FEM. Calculated stress plots are given.

*Key words:* rock mass, loose excavation, proper weight of rocks, half-plane, circular hole, internal pressure, stresses, theory of functions of a complex variable.

Введение

При проектировании выработок различного назначения, сооружаемых горным способом вблизи наклонной земной поверхности, возникает необходимость теоретического обоснования устойчивости горных склонов и непосредственно выработок при действии собственного веса пород, а также внутреннего напора для гидротехнических сооружений. В отечественной научной литературе [1] достаточно подробно представлены приближенные инженерные методики оценки устойчивости склонов; в работах [2 – 6] приведены результаты физического и численного моделирования напряженно-деформированного состояния массива пород склона, ослабленного одной или двумя параллельными выработками, позволяющие определить области неупругих деформаций пород вокруг выработок.

Ниже приведено описание математической модели формирования напряженно-деформированного состояния массива пород вокруг выработок, пройденных в непосредственной близости от склона. В основу разработанной модели положены аналитические решения соответствующих задач теории упругости о равновесии весомой упругой полуплоскости, ослабленной круговым отверстием, позволяющие оценить напряженно-деформированное состояние массива пород и выполнить сравнение с результатами, полученными численными методами и опубликованными в [6].

*Постановка задач теории упругости. Граничные условия*

На рис. 1 а, б приведены расчетные схемы и описание постановок задач о равновесии линейно-деформируемой полубесконечной среды, ослабленной круговым отверстием.

В задаче 1 рассматривается весомая среда; действие собственного веса пород учитывается полем начальных напряжений с компонентами:

$$\begin{aligned} \sigma_x^{(0)(0)} &= -\lambda\gamma(H - y) \cos \beta; \\ \sigma_y^{(0)(0)} &= -\gamma(H - y) \cos \beta; \\ \tau_{xy}^{(0)(0)} &= -\gamma(H - y) \sin \beta, \end{aligned} \tag{1}$$

где  $\gamma$  – удельный вес пород;  $H$  – глубина заложения выработки;  $\lambda$  – коэффициент бокового давления, определяемый экспериментально;  $y$  – ордината в наклонной системе координат  $xOy$ ;  $\beta$  – угол наклона земной поверхности к горизонту. В задаче 2 среда невесома.

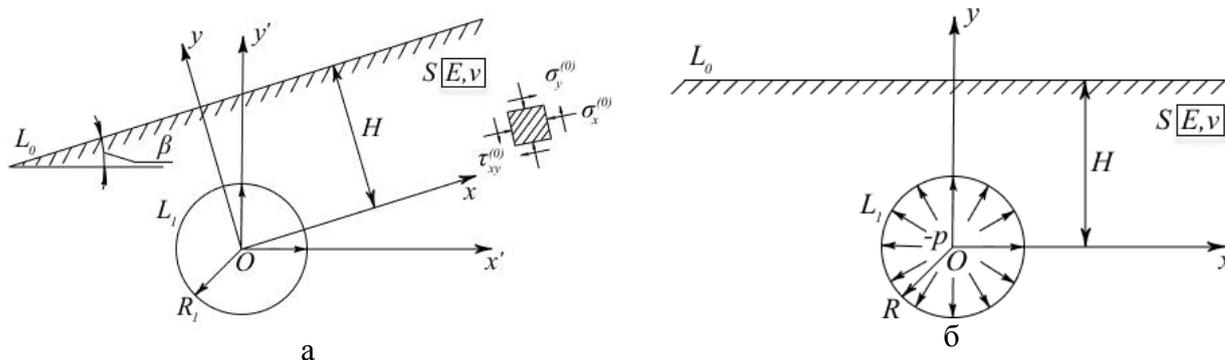


Рис. 1. Расчетные схемы:

а – о действии собственного веса пород; б – о действии внутреннего напора

В задаче 1 полные напряжения  $\sigma_x^{(0)*}, \sigma_y^{(0)*}, \tau_{xy}^{(0)*}$  в среде  $S_0$  представляются в виде сумм:

$$\sigma_x^{(0)*} = \sigma_x^{(0)(0)} + \sigma_x^{(0)}; \quad \sigma_y^{(0)*} = \sigma_y^{(0)(0)} + \sigma_y^{(0)}; \quad \tau_{xy}^{(0)*} = \tau_{xy}^{(0)(0)} + \tau_{xy}^{(0)}, \tag{2}$$

где  $\sigma_x^{(0)}$ ,  $\sigma_y^{(0)}$ ,  $\tau_{xy}^{(0)}$  – искомые дополнительные напряжения в среде  $S_0$ , обусловленные наличием отверстия.

В задаче 2 искомые дополнительные напряжения являются полными.

Смещения в обеих задачах рассматриваются как дополнительные.

В расчетных схемах задач (рис. 1 а, б) линейно деформируемая полубесконечная среда ослаблена вблизи прямолинейной границы  $L_0$  круговым отверстием с контуром  $L_1$  радиусом  $R$ . В задаче 1 (о действии собственного веса пород) контур  $L_1$  свободен от действия внешних сил (рис. 1 а); в задаче 2 (о действии внутреннего напора) испытывает внутреннее равномерное давление интенсивностью  $p$  (рис. 1 б).

Граничные условия поставленных задач имеют вид:

- на прямолинейной границе  $L_0$

$$\sigma_y^* = 0, \tau_{xy}^* = 0 \text{ для обеих задач;} \quad (3)$$

$$\sigma_r^{(1)(m)*} = \begin{cases} 0 & \text{в задаче 1;} \\ -p & \text{в задаче 2;} \end{cases} \quad \tau_{r\theta}^{(1)(m)*} = 0 \text{ для обеих задач.} \quad (4)$$

В условиях (3) напряжения  $\sigma_y^*$ ,  $\tau_{xy}^*$  – соответственно, полные нормальные и касательные напряжения в наклонной системе координат;  $\sigma_r^*$ ,  $\tau_{r\theta}^*$  в выражениях (4) – соответственно, полные радиальные и касательные напряжения в точках контура  $L_1$  в полярной системе координат с полюсом в точке  $O$ .

Решения поставленных задач теории упругости получены с применением математического аппарата теории функций комплексного переменного (ТФКП), достаточно хорошо апробированного в работах [9 – 11].

Это потребовало введения в области  $S$  комплексных потенциалов Колосова–Мухелишвили  $\tilde{\phi}(z)$ ,  $\tilde{\psi}(z)$ , которые связаны с компонентами напряжений известными формулами [7].

Граничные условия краевой задачи ТФКП имеют следующий вид:

$$\tilde{\phi}(t_0) + t_0 \overline{\tilde{\phi}'(t_0)} + \overline{\tilde{\psi}(t_0)} = 0 \text{ на } L_0; \quad (5)$$

$$\tilde{\phi}(t_1) + t_1 \overline{\tilde{\phi}'(t_1)} + \overline{\tilde{\psi}(t_1)} = \begin{cases} 0 & \text{в задаче 1,} \\ -pt_1 & \text{в задаче 2} \end{cases} \text{ на } L_1, \quad (6)$$

где  $t_0 = x + iH$ ;  $t_1 = Re^{i\theta} = R\sigma$ ;  $\sigma = e^{i\theta}$ ;  $\theta$  – полярный угол, отсчитываемый от оси  $Ox$  против хода часовой стрелки;

$$\nu = 3 - 4\nu, \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}. \quad (7)$$

Аналитические решения поставленных задач получены с использованием модифицированного в [9] метода И.Г. Арамановича [8], предусматривающего аналитическое продолжение комплексных потенциалов через границу полуплоскости, использование свойств интегралов типа Коши и рядов Лорана.

Особенностью решения для каждой из поставленных задач для полубесконечной среды является его сведение к решению соответствующей задачи о равновесии полной плоскости, ослабленной отверстием, с граничным условием на контуре отверстия  $L_1$ , содержащем дополнительные члены, отвечающие за влияние наклонной границы [10, 11].

### Результаты и их обсуждение

Полученные результаты позволяют выполнить сравнение с данными численного моделирования [6] напряженного состояния склона для случая, когда продольная ось выработки расположена параллельно плоскости склона на основе решения задачи теории упругости с применением методов оптимизации. В процессе решения обеспечивается достижение максимума целевой функции - нормальных радиальных напряжений  $\sigma_n$  на контуре отверстия, обеспечивающих его устойчивость при действии гравитационных сил.

В работе [6] приведены результаты определения величины минимального равномерного внутреннего давления  $p$ , действующего на контуре кругового отверстия диаметром  $D$ , расположенного на расстоянии  $H$  (рис. 2) в полубесконечном массиве с удельным весом  $\gamma$  вблизи прямолинейной границы, обеспечивающего устойчивость контура отверстия.

Результаты численного решения представлены в виде графических зависимостей искомого относительного равномерного внутреннего давления  $p/c$  ( $c$  – сцепление грунта) для различных диапазонов изменения величин  $H/D$ ,  $\gamma D/c$ , угла внутреннего трения грунта  $\varphi$ , угла наклона склона  $\beta$ .

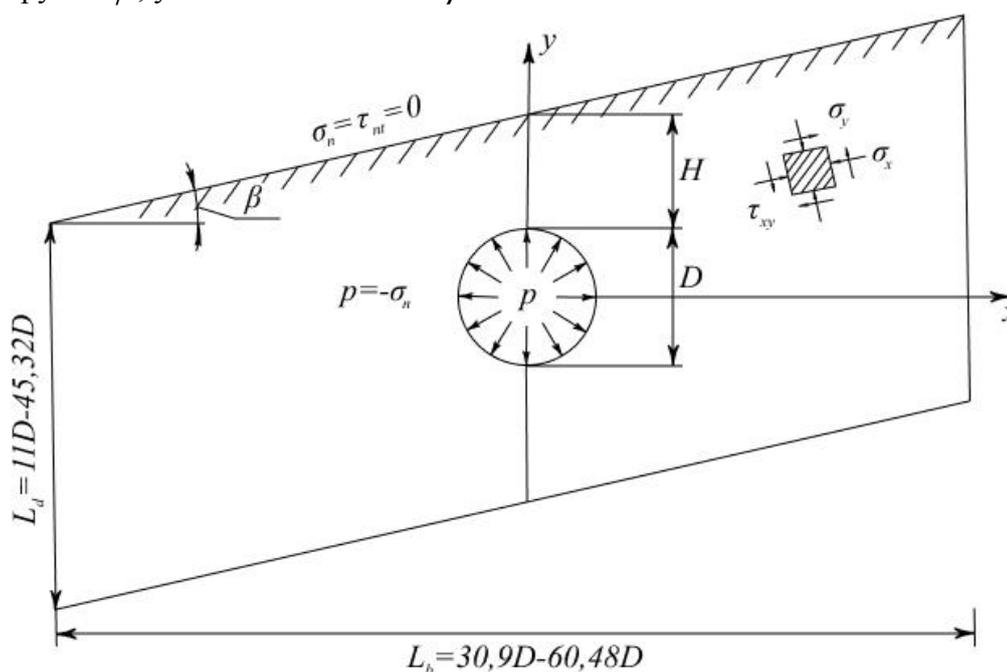


Рис. 2. Расчетная схема в работе [6]

При моделировании в расчетной схеме обломочных грунтов, трение между частицами которых пропорционально нормальным силам, действующим по площадкам контакта, в качестве критерия устойчивости склона и контура выработки применяется условие прочности Кулона-Мора, позволяющее определить условные зоны неупругих деформаций в массиве грунта.

Полученные результаты послужат основой для рассмотрения более сложных математических моделей, учитывающих проходку выработки по границе раздела грунтов с различными деформационными характеристиками, а также наличие отверстия с впаянным кольцом, моделирующих подкрепленную выработку.

### Заключение

При проведении горно-проходческих и строительных работ в районах, отличающихся сложным рельефом поверхности и наличием слабых пород (грунтов), возможно изменение напряженно-деформированного состояния массива пород, в результате которого может быть снижена или потеряна устойчивость как склона, так и контура выработки. Разработка и использование строгих аналитических методов оценки устойчивости склонов является актуальной задачей, решение которой позволит сформулировать рекомендации по выполнению работ, исходя из особенностей используемых технологий действующих нагрузок.

### Список литературы

1. Маслов Н.Н., 1955. *Условия устойчивости склонов и откосов в гидроэнергетическом строительстве*. Москва – Ленинград: Государственное энергетическое изд-во, 467 с.
2. Богомолов А.Н., Абрамов Г.А., Богомолова О.А., Пристансков А.А., Ермаков О.В., 2018. Численные и модельные эксперименты по определению устойчивости однородного откоса, подработанного горизонтальной выработкой. *Вестник ПНИПУ. Строительство и архитектура*, № 1, С. 30 - 41.
3. Богомолов А.Н., Абрамов Г.А., Богомолова О.А., Пристансков А.А., Ермаков О.В., 2018. Влияние горизонтальной подземной выработки, ориентированной параллельно фронту однородного откоса, на его устойчивость. *Вестник ПНИПУ. Строительство и архитектура*, № 1, С. 82 - 92.
4. Богомолов А.Н., Абрамов Г.А., Богомолова О.А., 2018. Устойчивость двух спаренных круглых выработок, обрабатываемых в однородном откосе на уровне его подошвы. *Наука и просвещение: XVII Международная научно-практическая конференция МЦНС. Сборник статей*, С. 98 - 103.
5. Jiayong Niu, Xueliang Jiang, Feifei Wang, Hui Yang, 2020. Comparative Analysis of Dynamic Responses of Different Rock Tunnel Slopes. *Geotechnical and Geological Engineering*, April, 38(8). DOI: 10.1007/s10706-019-01099-2.
6. Sounik K. Banerjee, Debarghya Chakraborty, 2018. Stability of long circular tunnels in sloping ground. *Geomechanics and Geoengineering*. 13(2), P. 104 - 114.
7. Мухелишвили Н.И., 1966. *Некоторые основные задачи математической теории упругости*. Москва: Наука, 707 с.
8. Араманович И.Г., 1955. О распределении напряжений в упругой полуплоскости, ослабленной подкрепленным круговым отверстием. *Докл. АН СССР*, Т. 104, №3, С. 372 - 375.
9. Анциферов С.В., 2014. *Метод расчета многослойных обделок параллельных тоннелей кругового поперечного сечения мелко заложения: монография*. Тула: Изд-во ТулГУ, 298 с.
10. Фомин А.В., Анциферов С.В., 2018. Определение напряженного состояния обделок параллельных тоннелей, сооруженных вблизи склона. *Научные исследования в области технических и технологических систем: Сборник статей Международной научно-практической конференции*. Уфа: "ОМЕГА САЙНС", С. 104 - 109.
11. Анциферов С.В., Фомин А.В., Феклин А.А., Кудрявцев М.А., 2021. Исследование напряженного состояния массива пород и обделок параллельных тоннелей, сооружаемых вблизи горного склона. *Фундаментальные и прикладные вопросы горных наук*, Т. 8, № 1, С. 20 - 26.

## References

1. Maslov N.N., 1955. Usloviya ustoichivosti sklonov i otkosov v gidroenergeticheskom stroitel'stve . [Conditions of stability of slopes and declines during hydro-energy construction]. Moscow – Leningrad: Gosudarstvennoe energeticheskoe izd-vo, 467 p.
2. Bogomolov A.N., Abramov G.A., Bogomolova O.A., Pristanskov A.A., Ermakov O.V., 2018. Chislennyye i model'nyye eksperimenty po opredeleniyu ustoichivosti odnorodnogo otkosa, podrobotannogo gorizontальной vyrabotkoi [Numerical and model experiments to determine the stability of a homogeneous slope worked by a horizontal mining]. Vestnik PNIPU. Stroitel'stvo i arkhitektura, № 1, P. 30 - 41.
3. Bogomolov A.N., Abramov G.A., Bogomolova O.A., Pristanskov A.A., Ermakov O.V., 2018. Vliyanie gorizontальной podzemnoi vyrabotki, orientirovannoi parallel'no frontu odnorodnogo otkosa, na ego ustoichivost' [Influence of horizontal underground workings oriented parallel to the front of a homogeneous slope on its stability]. Vestnik PNIPU. Stroitel'stvo i arkhitektura, № 1, P. 82 - 92.
4. Bogomolov A.N., Abramov G.A., Bogomolova O.A., 2018. Ustoichivost' dvukh sparenykh kruglykh vyrabotok, otrabatyvaemykh v odnorodnom otkose na urovne ego podoshvy [Stability of two paired round workings, worked out in a homogeneous slope at the level of its sole]. Nauka i prosveshchenie: XVII Mezhdunarodnaya nauchno-prakticheskaya konferentsiya MTsNS. Sbornik statei, P. 98 - 103.
5. Jiayong Niu, Xueliang Jiang, Feifei Wang, Hui Yang, 2020. Comparative Analysis of Dynamic Responses of Different Rock Tunnel Slopes. *Geotechnical and Geological Engineering*, April, 38(8). DOI: 10.1007/s10706-019-01099-2.
6. Sounik K. Banerjee, Debarghya Chakraborty, 2018. Stability of long circular tunnels in sloping ground. *Geomechanics and Geoengineering*. 13(2), P. 104 - 114.
7. Muskhelishvili N.I., 1966. Nekotorye osnovnyye zadachi matematicheskoi teorii uprugosti [Some basic problems of the mathematical theory of elasticity]. Moscow: Nauka, 707 p.
8. Aramanovich I.G., 1955. O raspredelenii napryazhenii v uprugoi poluploskosti, oslablennoi podkreplennym krugovym otverstiem [On the distribution of stresses in an elastic half-plane weakened by a reinforced circular hole]. Dokl. AN SSSR, Vol. 104, №3, P. 372 - 375.
9. Antsiferov S.V., 2014. Metod rascheta mnogosloynnykh obdelok parallel'nykh tonnelei krugovogo poperechnogo secheniya melkogo zalozheniya: monografiya [A calculation method for multilayer linings of parallel tunnels with circular cross-section of shallow laying: monograph]. Tula: Izd-vo TulGU, 298 p.
10. Fomin A.V., Antsiferov S.V., 2018. Opredelenie napryazhennogo sostoyaniya obdelok parallel'nykh tonnelei, sooruzhennykh vblizi sklona [Determination of the stress state of parallel tunnel linings constructed near a slope]. Nauchnye issledovaniya v oblasti tekhnicheskikh i tekhnologicheskikh sistem: Sbornik statei Mezhdunarodnoi nauchno-prakticheskoi konferentsii. Ufa: "OMEGA SAINS", P. 104 - 109.
11. Antsiferov S.V., Fomin A.V., Feklin A.A., Kudryavtsev M.A., 2021. Issledovanie napriazhennogo sostoyaniia massiva porod i obdelok parallel'nykh tonnelei, sooruzhaemykh vblizi gornogo sklona [Study of the tense state of the rock mass and the linings of parallel tunnels constructed near the mountain slope]. Fundamental'nye i prikladnyye voprosy gornyykh nauk, Vol. 8, № 1, P. 20 - 26.