

УДК 622.831:004.942

**Феклин Артем Александрович**

аспирант кафедры механики материалов  
Тульского Государственного университета,  
300012, Тульская обл., г. Тула,  
пр-кт Ленина, д. 92  
e-mail: [afeklin1@gmail.com](mailto:afeklin1@gmail.com)

**РАЗРАБОТКА МАТЕМАТИЧЕСКОЙ  
МОДЕЛИ ФОРМИРОВАНИЯ  
НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ КРЕПИ  
ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ГОРНЫХ ВЫРАБОТОК,  
СООРУЖАЕМЫХ В ЗОНАХ  
ТЕХНОЛОГИЧЕСКИ  
НЕОДНОРОДНЫХ ПОРОД**

**Аннотация:**

Приводится описание разработанной математической модели взаимодействия элементов единой деформируемой геомеханической системы "массив пород – зоны технологически неоднородных пород – крепь параллельных выработок – наклонная земная поверхность" при действии гравитационных сил в массиве. Модель позволяет учесть влияние на напряженно-деформированное состояние подземных конструкций и окружающего массива пород таких факторов, как угол наклона земной поверхности; количество параллельных выработок и их взаимное расположение; размеры концентрических зон предельно упроченного или ослабленного при проходке выработок массива пород; деформационные характеристики массива пород в естественном состоянии, технологически неоднородных пород и материала крепи выработок. Поскольку рассматриваются достаточно протяженные линейные объекты, используются расчетная схема, постановка и граничные условия плоской задачи теории упругости о равновесии весомой линейно-деформируемой полубесконечной области с наклонной границей, ослабленной круговыми отверстиями, подкрепленными кольцами. Вокруг отверстий выделены концентрические области с отличающимися деформационными характеристиками, моделирующие зоны технологически ослабленных пород. Строгое аналитическое решение поставленной задачи базируется на применении математического аппарата теории функций комплексного переменного – потенциалов Колосова – Мусхелишвили, характеризующих напряженно-деформированное состояние выделенных областей. Использование модифицированного метода И.Г. Арамановича позволяет свести решение поставленной задачи к хорошо сходящемуся итерационному процессу, на каждом шаге которого рассматривается задача о бесконечной среде, ослабленной одним подкрепленным отверстием в концентрической области с отличающимися характеристиками. В дальнейшем предлагаемая математическая модель будет модифицирована с целью учета влияния на напряженное состояние подземных конструкций веса объектов на поверхности, а также внутреннего давления.

**Ключевые слова:** крепь, параллельные выработки, горный склон, напряженное состояние, теория упругости, теория функций комплексного переменного, расчет.

DOI: 10.25635/2313-1586.2022.02.083

**Feklin Artem A.,**

Postgraduate student,  
Department of mechanics of materials,  
Tula State University,  
92 Lenin Av., 300012 Tula, Russia  
E-mail: [afeklin1@gmail.com](mailto:afeklin1@gmail.com)

**DEVELOPMENT OF A MATHEMATICAL  
MODEL OF THE FORMATION  
OF THE STRESS STATE OF THE SUPPORT  
OF PARALLEL MINE WORKINGS  
CONSTRUCTED IN AREAS  
OF TECHNOLOGICALLY  
HETEROGENEOUS ROCKS**

**Abstract:**

The paper includes a description of the developed mathematical model of the interaction of elements of a single deformable geomechanical system "rock mass - zones of technologically heterogeneous rocks - support parallel workings - inclined earth surface" under the action of gravitational forces in the array. The model allows us to take into account the influence on the stress-strain state of underground structures and the surrounding rock mass of factors such as the angle of inclination of the earth's surface; the number of parallel workings and their mutual location; the dimensions of the concentric zones of the rock mass previously hardened or weakened during the excavation; deformation characteristics of the rock mass in its natural state, technologically heterogeneous rocks and the material of the excavation support. Since sufficiently extended linear objects are considered, the calculation scheme, formulation and boundary conditions of the plane problem of elasticity theory on the equilibrium of a weighty linearly deformable semi-infinite region with an inclined boundary weakened by circular holes reinforced by rings are used. Concentric areas with different deformation characteristics are identified around the holes, modeling zones of technologically weakened rocks. The rigorous analytical solution of the problem is based on the application of the mathematical apparatus of the theory of functions of a complex variable - kolosov-muskhelishvili potentials characterizing the stress-strain state of the selected regions. Using the modified method of aramanovich i.g. Allows us to reduce the solution of the problem to a well-converging iterative process, at each step of which the problem of an infinite medium weakened by one reinforced hole in a concentric region with different characteristics is considered. In the future, the proposed mathematical model will be modified in order to take into account the impact on the stress state of underground structures of the weight of objects on the surface, as well as internal pressure.

**Key words:** support, parallel mine workings, mining slope, stressed state, theory of elasticity, theory of functions of complex variable, calculation.

## Введение

Проектирование объектов горнодобывающей промышленности, возводимых закрытым способом в районах со сложным горным рельефом с применением специальных способов строительства, требует оценки несущей способности крепи выработок и окружающего массива пород [1].

Специальные способы строительства подземных сооружений, предусматривающие предварительное инъекционное укрепление слабых или водонасыщенных пород, либо ослабление, вызванное, например, буровзрывным или другими механическими способами проходки выработок, приводят к образованию вблизи поверхности сооружения технологической неоднородности массива пород.

Данные натурных [2, 3], лабораторных [4] и численных [5, 6] исследований для подземных объектов различного назначения подтверждают возможность существенного изменения напряженно-деформированного состояния элементов геомеханической системы "массив пород – крепь выработок – горный склон", обусловленного взаимным влиянием близко расположенных выработок, наличием вокруг них зон пород с измененными механическими и деформационными характеристиками, а также наклонной дневной поверхности.

В материалах нормативно-технических документов и справочников по проектированию и строительству подземных сооружений отсутствуют рекомендации по учету влияния перечисленных выше факторов.

В настоящее время для оценки прочности подземных конструкций используются, как правило, специализированные пакеты компьютерных программ, реализующих численные решения задач геомеханики и механики подземных сооружений. Однако результаты, полученные с использованием таких пакетов, требуют проверки на достоверность и адекватность, что возможно осуществить путем сравнения с данными расчетов для частных случаев, разработанными аналитическими методами, базирующимися на решениях задач механики сплошных сред и, в частности, теории упругости.

Среди имеющихся аналитических методов расчета, в основу которых положены решения соответствующих задач математической или прикладной теории упругости, отсутствуют методы определения напряженного состояния крепи параллельных выработок, сооруженных вблизи наклонной дневной поверхности с учетом влияния зон технологически неоднородных пород, возникающих вокруг подземных объектов.

### *Описание математической модели*

В предлагаемой математической модели формирования напряженного состояния массива пород в естественном состоянии, зон технологически неоднородных пород и крепи выработок, сооружаемых вблизи склона, реализовано представление о взаимодействии подземных конструкций и окружающего массива грунта как элементов единой деформируемой системы [1], позволившее сформулировать и выполнить постановку соответствующей задачи теории упругости, а также получить ее аналитическое решение.

Так как в дальнейшем предполагается применение для решения поставленной задачи методов математической теории упругости, использующих аппарат комплексных потенциалов Колосова – Мухелишвили [7], в модели реализована расчетная схема плоской задачи теории упругости, результаты решения которой могут быть использованы для определения напряженного состояния крепи достаточно протяженных участков выработок и окружающего массива пород.

В разработанной модели учитываются следующие факторы, оказывающие существенное влияние на формирование напряженного состояния крепи и окружающего массива, включая зоны неоднородности:

- количество выработок и их взаимное расположение;
- наличие зон технологически неоднородного грунта вокруг тоннелей и размеры их поперечных сечений;

- глубину заложения каждой из выработок относительно наклонной дневной поверхности;
- размеры поперечных сечений выработок и используемой крепи;
- механические и деформационные характеристики массива пород в естественном и технологически неоднородном состояниях;
- деформационные характеристики материалов крепи;
- наличие полей начальных напряжений в массиве пород в естественном состоянии и в зонах пород с отличающимися свойствами, обусловленными гравитационными силами;
- очередность (последовательность) сооружения выработок и отставание возведения крепи от забоя в каждой из них, а также реологические свойства пород в рамках теории линейной наследственной ползучести с использованием метода переменных модулей [8].

Расчетная схема рассматриваемой задачи теории упругости приведена на рис. 1.

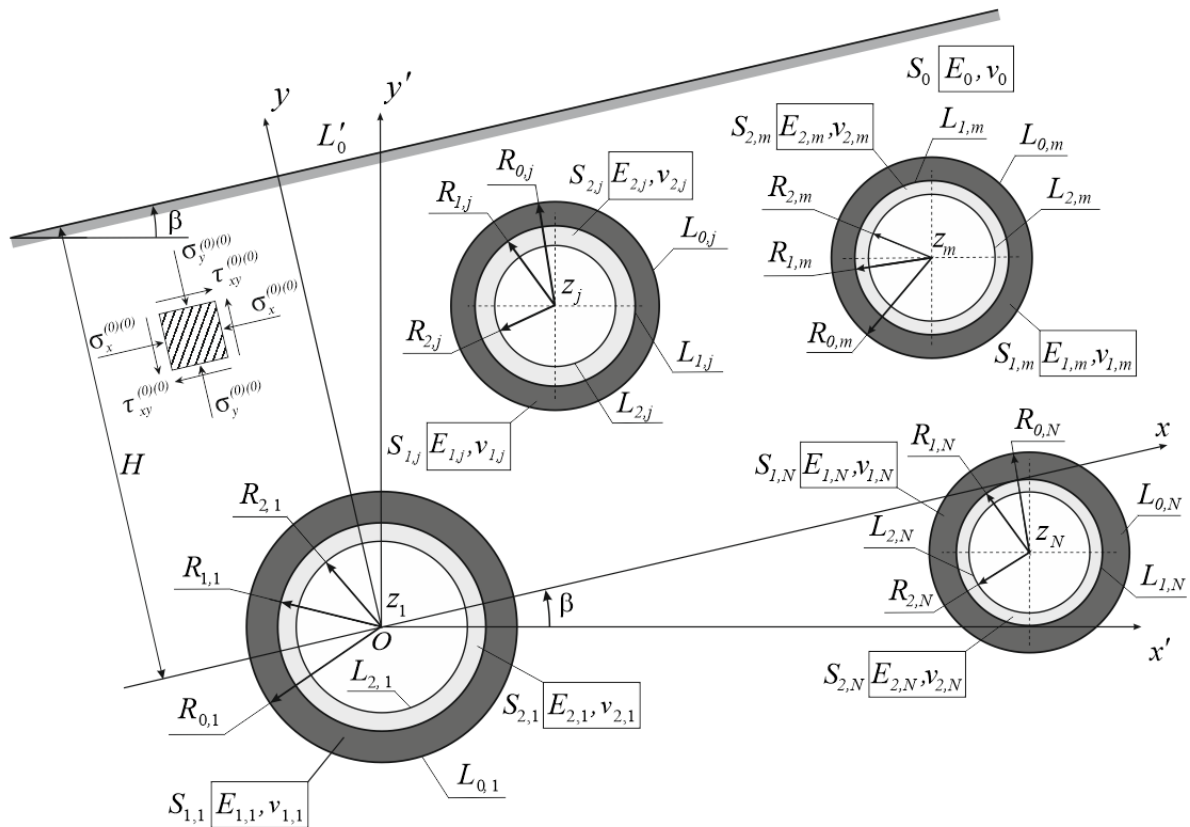


Рис. 1. Общая расчетная схема

Полубесконечная весомая линейно-деформируемая однородная среда  $S_0$  моделирует массив пород. Среда ограничена прямой  $L'_0$ , образующей угол  $\beta$  с горизонталью.

Материал среды характеризуется удельным весом  $\gamma$ ; коэффициентом бокового давления  $\lambda$ ; усредненным модулем деформации  $E_0$  и коэффициентом Пуассона  $\nu_0$ .

Среда  $S_0$  ослаблена произвольным числом  $N$  круговых отверстий, моделирующих сечения выработок. Контуры  $L_{1,m}$  отверстий имеют радиусы  $R_{1,m}$  ( $m=1, \dots, N$ ).

Центры отверстий расположены в точках с координатами  $(x'_m; y'_m)$ ,  $m = 1, \dots, N$  в прямоугольной системе координат  $X'OY'$ , начало которой совмещено с центром первого отверстия, ось  $OX'$  является горизонтальной. Оси  $OX$ ,  $OY$  наклонной системы координат  $XOY$  образуют угол  $\beta$  с соответствующими осями  $OX'$ ,  $OY'$ .

В расчетной схеме поперечные сечения зон технологически неоднородных пород вокруг выработок моделируются концентрическими круговыми областями  $S_{1,m}$  с деформационными характеристиками – модулями деформации  $E_{1,m}$  и коэффициентами Пуассона  $\nu_{1,m}$  ( $m = 1, \dots, N$ ), отличающимися от соответствующих деформационных характеристик среды  $S_0$ . Области  $S_{1,m}$  ограничены наружными контурами  $L_{0,m}$  радиусами  $R_{0,m}$  и внутренними контурами  $L_{1,m}$  радиусами  $R_{1,m}$  ( $m = 1, \dots, N$ ).

Удельный вес и коэффициент бокового давления материалов областей  $S_{1,m}$  ( $m = 1, \dots, N$ ) принимаются равными соответствующим величинам для среды  $S_0$ .

Отверстия подкреплены концентрическими кольцами  $S_{2,m}$  с внутренними контурами  $L_{2,m}$  радиусами  $R_{2,m}$ , моделирующими крепь выработок ( $m = 1, \dots, N$ ). Материалы колец  $S_{2,m}$  имеют деформационные характеристики  $E_{2,m}$ ,  $\nu_{2,m}$  ( $m = 1, \dots, N$ ). Весом крепи по сравнению с весом вмещающего массива пород пренебрегаем.

Рассматриваемые области  $S_0$ ,  $S_{1,m}$ ,  $S_{2,m}$  деформируются совместно – на линиях контакта  $L_{0,m}$ ,  $L_{1,m}$  ( $m = 1, \dots, N$ ) выполняются условия непрерывности векторов полных напряжений и смещений.

Наклонная граница  $L'_0$  полуплоскости  $S_0$  и внутренние контуры  $L_{2,m}$  колец  $S_{2,m}$  ( $m = 1, \dots, N$ ) свободны от действия внешних сил.

В среде  $S_0$  и в областях  $S_{1,m}$  заданы поля начальных напряжений, отвечающих за действие гравитационных сил, обусловленных собственным весом пород.

Компоненты этих полей в наклонной системе координат определяются соотношениями

$$\begin{aligned}\sigma_x^{(0)(0)} &= \sigma_x^{(1,m)(0)} = -\lambda\gamma(H - y) \cos \beta; \\ \sigma_y^{(0)(0)} &= \sigma_y^{(1,m)(0)} = -\gamma(H - y) \cos \beta; \\ \tau_{xy}^{(0)(0)} &= \tau_{xy}^{(1,m)(0)} = -\gamma(H - y) \sin \beta,\end{aligned}\tag{1}$$

где  $\sigma_x^{(0,m)(0)}$ ,  $\sigma_y^{(0,m)(0)}$ ,  $\tau_{xy}^{(0,m)(0)}$ ;  $\sigma_x^{(1,m)(0)}$ ,  $\sigma_y^{(1,m)(0)}$ ,  $\tau_{xy}^{(1,m)(0)}$  – компоненты поля начальных напряжений, соответственно, в областях  $S_0$  и  $S_{1,m}$  ( $m = 1, \dots, N$ ).

Полные напряжения в среде  $S_0$  и в областях  $S_{1,m}$  ( $m = 1, \dots, N$ ) представляются в виде сумм искоемых дополнительных напряжений и начальных напряжений, задаваемых соотношениями из (1):

$$\begin{aligned}\sigma_x^{(0)*} &= \sigma_x^{(0)} + \sigma_x^{(0)(0)}; & \sigma_x^{(1,m)*} &= \sigma_x^{(1,m)} + \sigma_x^{(1,m)(0)}; \\ \sigma_y^{(0)*} &= \sigma_y^{(0)} + \sigma_y^{(0)(0)}; & \sigma_y^{(1,m)*} &= \sigma_y^{(1,m)} + \sigma_y^{(1,m)(0)}; \\ \tau_{xy}^{(0)*} &= \tau_{xy}^{(0)} + \tau_{xy}^{(0)(0)}; & \tau_{xy}^{(1,m)*} &= \tau_{xy}^{(1,m)} + \tau_{xy}^{(1,m)(0)}.\end{aligned}\tag{2}$$

где  $\sigma_x^{(0)*}$ ,  $\sigma_y^{(0)*}$ ,  $\tau_{xy}^{(0)*}$  – полные напряжения в среде  $S_0$ ;  $\sigma_x^{(1,m)*}$ ,  $\sigma_y^{(1,m)*}$ ,  $\tau_{xy}^{(1,m)*}$  – полные напряжения в областях  $S_{1,m}$  ( $m=1, \dots, N$ );  $\sigma_x^{(0)}$ ,  $\sigma_y^{(0)}$ ,  $\tau_{xy}^{(0)}$  – дополнительные напряжения в среде  $S_0$ ;  $\sigma_x^{(1,m)}$ ,  $\sigma_y^{(1,m)}$ ,  $\tau_{xy}^{(1,m)}$  – дополнительные в областях  $S_{1,m}$  ( $m=1, \dots, N$ ).

Смещения во всех областях рассматриваются только дополнительные.

Граничные условия задачи в полных напряжениях примут вид:

– на прямолинейной границе  $L'_0$

$$\sigma_y^{(0)*} = 0, \tau_{xy}^{(0)*} = 0; \quad (3)$$

– на контурах  $L_{0,m}$  ( $m=1, \dots, N$ )

$$\sigma_r^{(1,m)*} = \sigma_r^{(0)*}, \tau_{r\theta}^{(1,m)*} = \tau_{r\theta}^{(0)*}; \quad (4)$$

$$u^{(1,m)} = u^{(0)}, v^{(1,m)} = v^{(0)}; \quad (5)$$

– на контурах  $L_{1,m}$  ( $m=1, \dots, N$ )

$$\sigma_r^{(2,m)*} = \sigma_r^{(1,m)*}, \tau_{r\theta}^{(2,m)*} = \tau_{r\theta}^{(1,m)*}; \quad (6)$$

$$u^{(2,m)} = u^{(1,m)}, v^{(2,m)} = v^{(1,m)}; \quad (7)$$

– на внутренних контурах  $L_{2,m}$  ( $m=1, \dots, N$ )

$$\sigma_r^{(2,m)*} = 0, \tau_{r\theta}^{(2,m)*} = 0, \quad (8)$$

где  $\sigma_y^{(0)*}$ ,  $\tau_{xy}^{(0)*}$  – нормальные и касательные напряжения в наклонной системе координат в среде  $S_0$ ;  $\sigma_r^{(l,m)*}$ ,  $\tau_{r\theta}^{(l,m)*}$  – полные радиальные и касательные напряжения;  $u^{(l,m)}$ ,  $v^{(l,m)}$  – дополнительные радиальные и окружные смещения в точках областей  $S_{l,m}$  ( $l=0, 1, 2$ ;  $m=1, \dots, N$ ) в полярных системах координат.

После перехода к соответствующей краевой задаче теории аналитических функций комплексного переменного (ТФКП) для кусочно-однородной многосвязной области решение получено с помощью модифицированного в работах [8, 10 – 14] метода И.Г. Арамановича [9].

Особенностью предлагаемого решения [13, 15] поставленной задачи об определении напряженного состояния колец, подкрепляющих несколько круговых отверстий внутри шайб в полуплоскости с наклонной границей, является использование сходящегося итерационного процесса, на каждом шаге которого рассматривается задача о напряженном состоянии двухслойного концентрического кольца в полной плоскости при граничных условиях, содержащих дополнительные члены в виде рядов Лорана с коэффициентами, отвечающими за влияние наклонной границы и соседних подкрепленных отверстий.

### Выводы

Таким образом, в работе поставлены и решены следующие задачи:

– определены факторы, оказывающие существенное влияние на напряженное состояние крепи выработок, сооруженных вблизи наклонной земной поверхности, технологически неоднородных пород и пород в естественном состоянии;

– предложена и обоснована расчетная схема плоской задачи теории упругости, применимая для достаточно протяженных участков параллельных выработок, сооруженных в технологически неоднородных породах;

– выполнена постановка плоской задачи теории упругости о равновесии линейно-деформируемой однородной весомой среды с наклонной границей, ослабленной произвольным числом подкрепленных круговых отверстий, вокруг которых имеются концентрические зоны с отличающимися деформационными характеристиками;

- сформулированы граничные условия задачи на линиях контакта областей с различными деформационными характеристиками, отражающие равенство векторов полных напряжений и дополнительных смещений, которые соответствуют предположению о совместной работе крепи выработок, зон неоднородных пород и пород в естественном состоянии как элементов единой деформируемой геомеханической системы;
- обоснован выбор общего метода решения поставленной плоской задачи теории упругости, использующего математический аппарат ТФКП, как хорошо разработанного и апробированного, позволяющего получить строгое аналитическое решение;
- полученное решение задачи позволяет определить компоненты напряженного состояния соответствующих областей, моделирующих массив пород в естественном состоянии, зон технологически неоднородных пород и крепи выработок при действии гравитационных сил;
- предлагаемая математическая модель допускает дальнейшую модификацию с целью учета влияния на напряженное состояние подземных конструкций действия веса объектов, расположенных на дневной поверхности, а также внутреннего давления для гидротехнических сооружений.

### Список литературы

1. Булычев Н.С., 1994. *Механика подземных сооружений*. Учеб. для вузов. 2-е изд., перераб. и доп. Москва: Недра, 382 с.
2. Безродный К.П., Лебедев М.О., 2012. Формирование напряженного состояния временной крепи при строительстве транспортного тоннеля СКЖД вблизи склона. *Горный информационно-аналитический бюллетень*, № 6, С. 237 - 244.
3. Лебедев М.О., 2012. Формирование напряженного состояния временной крепи при строительстве транспортного тоннеля вблизи склона. *Записки горного института*, Т. 199, С. 161 - 167.
4. Богомоллов А.Н., Абрамов Г.А., Богомоллова О.А., Пристансков А.А., 2017. Распределение напряжений в однородном изотропном откосе, ослабленном горизонтальной круглой выработкой, расположенной на уровне его подошвы. *Вестник ПНИПУ. Строительство и архитектура*, Т. 8, № 2, С. 15 – 26.
5. Протосеня А.Г., Беляков Н.А., 2012. Метод прогноза напряженно-деформированного состояния обделок двух взаимовлияющих тоннелей с учетом технологии строительства. *Записки Горного института*, Т. 199, С. 128 - 133.
6. Niu J., Jiang X., Wang F., 2020. Comparative analysis of dynamic responses of different rock tunnel slopes. *Geotechnical and geological engineering April*, 38(8), P. 1410 - 1430.
7. Мухелишвили Н.И., 1966. *Некоторые основные задачи математической теории упругости*. Москва: Наука, 707 с.
8. Анциферов С.В., 2014. *Метод расчета многослойных обделок параллельных тоннелей кругового поперечного сечения мелкого заложения*. Тула: Изд-во ТулГУ, 298 с.
9. Араманович И.Г., 1955. О распределении напряжений в упругой полуплоскости, ослабленной подкрепленным круговым отверстием. *Докл. АН СССР*, Т. 104, № 3, С. 372 - 375.
10. Анциферов С.В., Саммаль А.С., Фомин А.В., 2019. О напряженном состоянии монолитной крепи горных выработок, сооруженных вблизи склона. *Фундаментальные и прикладные вопросы горных наук*, Т. 6, № 1, С. 46 - 51.
11. Анциферов С.В., Фомин А.В., 2017. Математическое моделирование взаимодействия обделок параллельных тоннелей, сооруженных вблизи склона, с массивом грунта. *Известия Тульского государственного университета. Науки о Земле*. № 4, С. 255 - 262.

12. Анциферов С.В., Фомин А.В., Феклин А.А., Кудрявцев М.А., 2021. Исследование напряженного состояния массива пород и обделок параллельных тоннелей, сооружаемых вблизи горного склона. *Фундаментальные и прикладные вопросы горных наук*, Т. 8., № 1, С. 20 - 26.

13. Анциферов С.В., Феклин А.А., Залесский К.Е., 2021. Математическая модель определения напряженного состояния обделок тоннелей, сооруженных вблизи наклонной земной поверхности, с учетом технологической неоднородности грунта вокруг выработок. *Социально-экономические и экологические проблемы горной промышленности, строительства и энергетики: материалы 17-ой Международной конференции по проблемам горной промышленности, строительства и энергетики*. Тула: Изд-во ТулГУ, С. 560 - 566.

14. Анциферов С.В., Фомин А.В., Феклин А.А., 2021. Исследование напряженного состояния обделок тоннелей, сооруженных вблизи наклонной земной поверхности. *Известия ТулГУ. Науки о Земле*, Вып. 3., С. 244 - 257.

15. Феклин А.А., Анциферов С.В., Исаева Я.К., 2021. Математическое моделирование геомеханической системы "массив пород с наклонной поверхностью - зоны технологически неоднородных пород - обделки параллельных тоннелей". *Промышленная революция 4.0. Взгляд молодёжи. Сб. матер. межрегиональной научной сессии молодых исследователей*. Тула: Изд-во ТулГУ, С. 180 - 181.

### References

1. Bulychev N.S., 1994. *Mekhanika podzemnykh sooruzhenii* [Mechanics of underground structures]. Ucheb. dlya vuzov. 2-e izd., pererab. i dop. Moscow: Nedra, 382 p.

2. Bezrodnyi K.P., Lebedev M.O., 2012. Formirovanie napryazhennogo sostoyaniya vremennoi krepri pri stroitel'stve transportnogo tonnelya SKZhD vblizi sklona [Tense state formation on the temporary support during construction of the SKZhD transport tunnel near a slope]. *Gornyi informatsionno-analiticheskii byulleten'*, № 6, P. 237 - 244.

3. Lebedev M.O., 2012. Formirovanie napryazhennogo sostoyaniya vremennoi krepri pri stroitel'stve transportnogo tonnelya vblizi sklona [Tense state formation on the temporary support during construction of the transport tunnel near the slope]. *Zapiski gornogo instituta*, Vol. 199, P. 161 - 167.

4. Bogomolov A.N., Abramov G.A., Bogomolova O.A., Pristanskov A.A., 2017. Raspredelenie napryazhenii v odnorodnom izotropnom otkose, oslablennom gorizontnoi krugloj vyrabotkoi, raspolozhennoi na urovne ego podoshvy . [Stress distribution in a homogeneous isotropic slope weakened by a horizontal circular mine located at the level of its sole]. *Vestnik PNIPU. Stroitel'stvo i arkhitektura*, Vol. 8, № 2, P. 15 - 26.

5. Protosenya A.G., Belyakov N.A., 2012. Metod prognoza napryazhenno-deformirovannogo sostoyaniya obdelok dvukh vzaimovliyayushchikh tonnelei s uchetom tekhnologii stroitel'stva [A method for predicting the stress-strain state of the linings of two interdependent tunnels, taking into account the construction technology]. *Zapiski Gornogo instituta*, Vol. 199, P. 128 - 133.

6. Niu J., Jiang X., Wang F., 2020. Comparative analysis of dynamic responses of different rock tunnel slopes. *Geotechnical and geological engineering April*, 38(8), P. 1410 - 1430.

7. Muskhelishvili N.I., 1966. Nekotorye osnovnye zadachi matematicheskoi teorii uprugosti .[Some basic problems of the mathematical theory of elasticity]. Moscow: Nauka, 707 p.

8. Antsiferov S.V., 2014. Metod rascheta mnogosloinykh obdelok parallel'nykh tonnelei krugovogo poperechnogo secheniya melkogo zalozheniya [A calculation method for multilayer linings of parallel tunnels with circular cross-section of shallow laying]. Tuла: Изд-во ТулГУ, 298 p.

9. Aramanovich I.G., 1955. O raspredelenii napryazhenii v uprugoi poluploskosti, oslablennoi podkreplennym krugovym otverstiem [On the distribution of stresses in an elastic half-plane weakened by a reinforced circular hole]. Dokl. AN SSSR, Vol. 104, № 3, P.372 - 375.

10. Antsiferov S.V., Sammal' A.S., Fomin A.V., 2019. O napryazhennom sostoyanii monolitnoi krepri gornyykh vyrabotok, sooruzhennykh vblizi sklona [About the tense state of the monolithic support of the mine workings constructed near the slope]. Fundamental'nye i prikladnye voprosy gornyykh nauk, Vol. 6, № 1, P. 46 - 51.

11. Antsiferov S.V., Fomin A.V., 2017. Matematicheskoe modelirovanie vzaimodeystviya obdelok parallel'nykh tonnelei, sooruzhennykh vblizi sklona, s massivom grunta. Izvestiya Tul'skogo gosudarstvennogo universiteta [Mathematical modeling of the interaction of parallel tunnel linings constructed near the slope with the soil mass]. Nauki o Zemle. № 4, P. 255 - 262.

12. Antsiferov S.V., Fomin A.V., Feklin A.A., Kudryavtsev M.A., 2021. Issledovanie napryazhennogo sostoyaniya massiva porod i obdelok parallel'nykh tonnelei, sooruzhaemykh vblizi gornogo sklona . [Study of the tense state of the rock mass and the lining of parallel tunnels constructed near the mountain slope]. Fundamental'nye i prikladnye voprosy gornyykh nauk, Vol. 8., № 1, P. 20 - 26.

13. Antsiferov S.V., Feklin A.A., Zalesskii K.E., 2021. Matematicheskaya model' opredeleniya napryazhennogo sostoyaniya obdelok tonnelei, sooruzhennykh vblizi naklonnoi zemnoi poverkhnosti, s uchedom tekhnologicheskoi neodnorodnosti grunta vokrug vyrabotok [A mathematical model for determining the tense state of tunnel linings constructed near an inclined earth surface, taking into account the technological heterogeneity of the soil around the workings]. Sotsial'no-ekonomicheskie i ekologicheskie problemy gornoj promyshlennosti, stroitel'stva i energetiki: materialy 17-oi Mezhdunarodnoi konferentsii po problemam gornoj promyshlennosti, stroitel'stva i energetiki. Tula: Izd-vo TulGU, P. 560 - 566.

14. Antsiferov S.V., Fomin A.V., Feklin A.A., 2021. Issledovanie napryazhennogo sostoyaniya obdelok tonnelei, sooruzhennykh vblizi naklonnoi zemnoi poverkhnosti [Study of the tense state of tunnel linings constructed near the inclined earth surface]. Izvestiya TulGU. Nauki o Zemle, Vyp. 3., P. 244 - 257.

15. Feklin A.A., Antsiferov S.V., Isaeva Ya.K., 2021. Matematicheskoe modelirovanie geomekhanicheskoi sistemy "massiv porod s naklonnoi poverkhnost'yu - zony tekhnologicheskoi neodnorodnykh porod - obdelki parallel'nykh tonnelei" [Mathematical modeling of the geomechanical system "array of rocks with inclined surface - zones of technologically heterogeneous rocks - linings of parallel tunnels"]. Promyshlennaya revolyutsiya 4.0. Vzgl'yad molodezhi. Sb. mater. mezhhregional'noi nauchnoi sessii molodykh issledovatelei. Tula: Izd-vo TulGU, P. 180 - 181.