

УДК 622:519.8

Антонов Владимир Александрович

главный научный сотрудник,
доктор технических наук,
Институт горного дела УрО РАН,
620075, г. Екатеринбург,
ул. Мамина-Сибиряка, 58
e-mail: Antonov@igduran.ru

**ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ
МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
В РЕШЕНИЯХ НАУЧНЫХ
И ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ
ГОРНОГО ПРОИЗВОДСТВА***Аннотация:*

Изложен системный методологический подход к проведению экспериментального математического моделирования горно-технологических, геомеханических и экологических процессов горного производства. Рассмотрены принципы формирования, научного использования и практического применения имитационных, цифровых, регрессионных и функционально-факторных моделей. В результате сформирована необходимая структура экспериментального математического моделирования, в которой установлена связь и зависимость выбираемого типа модели от поставленной цели исследований, состава проведенных экспериментов и соответствующих принципов модельного формирования. Показано, что модели функционального типа отображают влияние на зависимую величину исследуемого техногенного явления устойчиво действующих факторов и предназначены для решения научной задачи поиска закономерностей ее изменения, по которым осуществляется прогнозирование и соответствующее проектирование производства горных работ. По результатам более подробного цифрового моделирования, дополнительно фиксирующего действие случайных факторов, принимаются частные ситуационные производственные решения. Дана оценка качества математических моделей по признакам их погрешности, уровней извлекаемого нового знания и практического применения. Сделан вывод, что предложенный системный подход к экспериментальному математическому моделированию техногенных явлений дает целостное представление о выборе его методов и типа моделей, обеспечивающих получение новых знаний и ранее неизвестной дополнительной информации об особенностях состояния и развития техногенных явлений, необходимой для решения поставленной научной и практической задачи горного производства.

Ключевые слова: техногенное явление горного производства, эксперимент, факторы, математическая функциональная и цифровая модель.

DOI: 10.25635/2313-1586.2022.02.092

Antonov Vladimir A.

Chief Researcher
Doctor of Engineering Sciences,
Institute of Mining, Ural Branch of RAS,
620075 Ekaterinburg,
58 Mamina-Sibiryaka Str.
e-mail: Antonov@igduran.ru

**EXPERIMENTAL MATHEMATICAL
MODELING IN SOLVING SCIENTIFIC AND
PRACTICAL PROBLEMS OF MINING
PRODUCTION***Abstract:*

The paper gives a description of the systematic methodological approach to conducting experimental mathematical modeling of technological, geomechanical and environmental processes of mining production. It considers the principles of formation, scientific use and practical application of simulation, digital, regression and functional factor models. As a result, we have formed the necessary structure of experimental mathematical modeling, in which the relationship and dependence of the selected model type on the objected research goal, the composition of the conducted experiments and the corresponding principles of model formation. The study shows that functional-type models reflect the influence of stable factors on the dependent magnitude of the studied technogenic phenomenon and are designed to solve the scientific problem of finding patterns of its change, according to which forecasting and appropriate design of mining operations are carried out. Based on the results of more detailed digital modeling, which additionally captures the effect of random factors, private situational production decisions are made. The quality of mathematical models is assessed by their imprecision rate, the levels of new knowledge extracted and the practical application. We concluded that the proposed systematic approach to experimental mathematical modeling of technogenic phenomena gives a holistic view of the choice of its methods and type of models that provide new knowledge and previously unknown additional information about the features of the state and development of technogenic phenomena necessary to solve the scientific and practical problem of mining.

Key words: Technogenic phenomenon of mining, experiment, factors, mathematical functional and digital model.

Введение

Стратегические и текущие решения задач комплексного освоения минеральных ресурсов принимают на горных предприятиях по результатам исследований состояния и динамики развития происходящих техногенных процессов. В связи со сложным составом и разнообразным действием множества влияющих факторов геологического, технологического и геомеханического происхождения проводить исследования теоретически весьма затруднительно или вовсе невозможно. Поэтому они осуществляются чаще всего эмпирическими методами, основанными на опытах и экспериментах, по результатам которых воспроизводятся модели исследуемых техногенных явлений, предназначенные для поиска новых знаний и ранее неизвестной дополнительной информации об особенностях их развития, необходимых для достижения цели исследований и решения поставленных задач.

Наиболее определенную, объективную и точную информацию о техногенных процессах горного производства воспроизводят экспериментальные математические модели [1 – 3]. В современных широко распространенных программных средствах компьютерного моделирования они строятся по отличающимся принципам интерполяции и обобщения данных, полученных в экспериментах, приводящим к соответственно разному раскрытию и толкованию свойств наблюдаемого техногенного явления. Один и тот же объект или процесс можно описывать по данным эксперимента моделями разного типа. При этом такие их качественные показатели, как сложность, детальность и достоверность, могут оказаться противоречивыми или даже несовместимыми [4, 5]. Очевидно, что экспериментальное математическое моделирование следует проводить, исходя из более углубленного анализа его принципов и ожидаемых результатов научного и практического применения.

В данной статье излагается системный методологический подход к выбору типа и применению экспериментальных математических моделей, исходя из направления горно-технологических исследований, поставленной научной и практической цели, а также содержания проведенных экспериментов. В соответствии с таким подходом приведена структура математического моделирования, а также оценка новых научных знаний об исследуемом техногенном явлении, извлекаемых из моделей разного типа. На практических примерах показано принципиальное качественное различие функционального и цифрового моделирования, влияющее на научную и практическую значимость созданных моделей и их применение в решениях поставленных задач горного производства.

Структура математического моделирования

Исследования горного производства проводят в направлениях геометризации форм и свойств рудных тел, вскрышных горных пород и других территориальных техногенных объектов, а также оптимизации и определения наилучших режимов горно-технологических процессов, обеспечения экологической и геомеханической безопасности. Исходными данными в исследованиях являются результаты геологического опробования горных пород, мониторинговые геофизические, геодезические и спутниковые навигационные измерения, выборочная регистрация технологических режимов и параметров, а также численные оценки дискретного имитационного моделирования техногенных явлений.

Исследования регламентируются постановкой научной задачи и практическим назначением. Научная задача состоит в раскрытии и понимании связей данных, полученных в опытах и экспериментах, извлечении из них новых знаний о горно-технологических процессах, дающих целостное представление о состоянии и закономерностях развития наблюдаемого техногенного явления. Практическое же назначение исследований заключается в инженерном творческом применении известных или созданных моделей, связей и закономерностей, а также непосредственных результатов

экспериментальных измерений в решениях производственных задач. Обусловленный состав исследований горного производства показан в табл. 1.

Таблица 1

Состав исследований горного производства

Направление исследований	Исходные данные	Научная задача	Практическое назначение
Геометризация форм и свойств рудных тел и вскрышных горных пород	Геологическое опробование горных пород. Геофизические и маркшейдерские измерения	Выявить закономерности геопространственного размещения форм и свойств геологических залежей	Аналитическое и графическое отображение форм и свойств геологических залежей для проектирования, планирования и прогнозирования
Оптимизация режимов горно-технологических процессов	Дискретные измерения технологических режимов и параметров. Результаты дискретного имитационного моделирования	Определить закономерности изменения зависимой величины техногенного явления от аргументов	Установление параметров и показателей, при которых наилучшим образом осуществляется горно-технологический процесс
Экологическая и геомеханическая безопасность	Экологический и деформационный мониторинг горно-промышленной территории	Выявить связи и закономерности размещения показателей экологического и геомеханического состояния территории	Определение зон горнопромышленной территории с аномальным экологическим и геомеханическим состоянием

Главная проблема экспериментальных исследований, проводимых методом моделирования, состоит в выборе приемов и средств необходимого перехода от фрагментных знаний наблюдаемого явления, полученных в экспериментах, к обобщенному системному знанию его связей и развития. Отмеченный выбор зависит от постановки научной задачи и вида проведенных экспериментов. Требуется также выделить физическую величину, наиболее важную для описания техногенного явления, зависящую от остальных величин. По степени их влияния, интервалу изменения и учету в моделях отмечаются аргументы. Определяются также основные устойчиво повторяющиеся и случайные факторы, то есть причины техногенного явления, влияющие на зависимую величину. Они не отождествляются с аргументами, а изменяются в связи с ними.

Оценивая средства математического моделирования, рассмотрим принципы формирования обобщенно связывающих функциональных моделей. Выделим также применение в детальных исследованиях процессов или больших объектов горного производства дискретно фиксирующих цифровых моделей. Они получили широкое распространение по мере развития систем коммуникаций и вычислительной компьютерной техники, а также перевода различных видов информации в дискретную форму. Модели различаются по постановке цели исследований, научной задачи, методам расчета и выражения зависимой величины техногенного явления, а также практическому применению. Наиболее часто применяются модели следующих типов [6, 7]:

- имитационные (алгоритмы аналитического или конечно-элементного расчета дискретных значений зависимой величины техногенного явления);
- цифровые регистрационные (фотограмметрические, радиолокационные) и интерполяционные (кригинг, радиальные весовые, конечных элементов);

- линейные регрессионные;
- нелинейные функционально-факторные.

Структурная связь этапов и методов экспериментальных исследований показана на рис. 1. Дискретное имитационное моделирование как средство получения фрагментарного знания о техногенном явлении проводится при затруднении или невозможности непосредственных или косвенных экспериментальных измерений его величин [8, 9]. Тогда по многозвенной цепи известных теоретических положений, определяющих формирование зависимой величины, проводятся численные математические расчеты ее частных значений. Образованная таким образом логико-математическая модель реализуется алгоритмом последовательного выполнения на компьютере большого количества элементарных операций при заданных аргументах и других модельных параметрах. Их значения выборочно изменяются в установленных интервалах в соответствии со свойствами неоднородности реальных объектов и процессов. Если какой-либо параметр изменяется широко и оказывает существенное влияние на зависимую величину, превышающее допустимую погрешность модели, то для учета свойств такого влияния и снижения погрешности всегда есть возможность перевести параметр в разряд аргументов, увеличив при этом размерность модели. Результаты имитационного моделирования представляются графически в системе координат выбранных аргументов. Сопоставление полученных значений зависимой величины на графиках дает возможность качественно и дискретно количественно оценивать характер ее изменений.

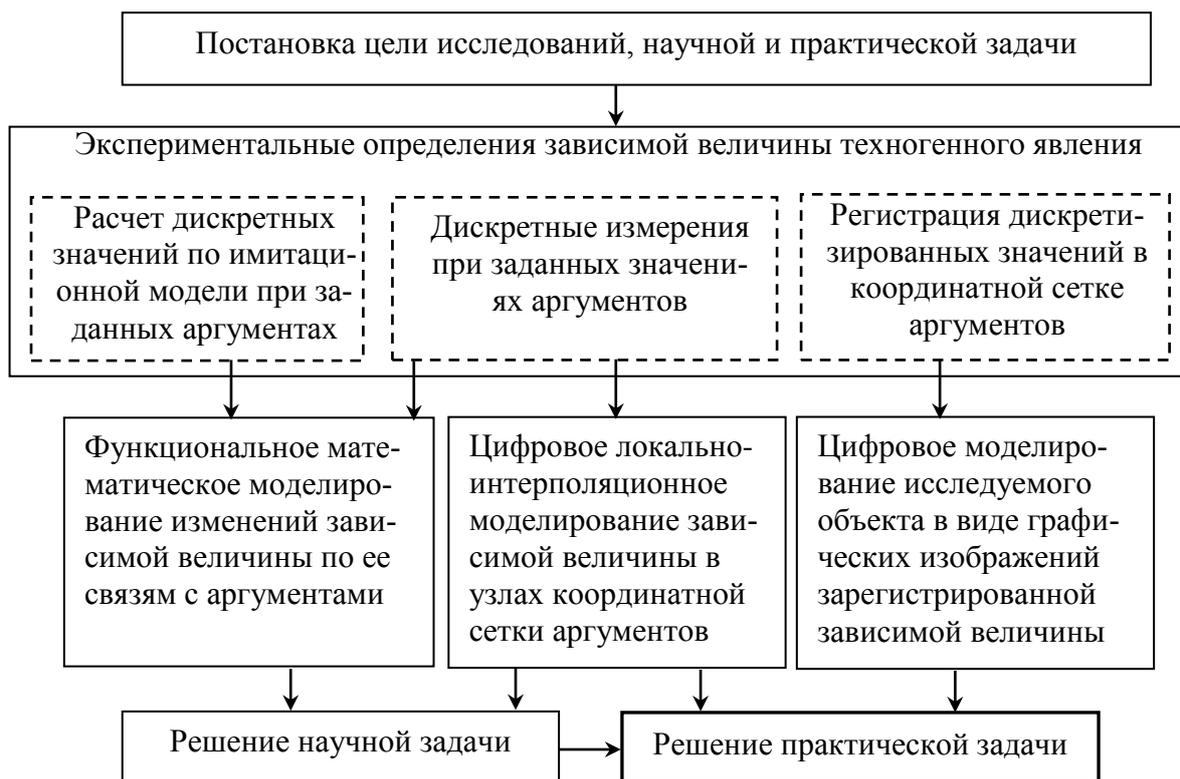


Рис. 1. Структура экспериментального математического моделирования

В регистрационном цифровом моделировании, проводимом, например, методами фотограмметрии или радиолокации [10, 11], экспериментальные значения зависимой величины исследуемого явления дискретизируются аналого-цифровыми преобразованиями и фиксируются в многочисленных узлах координатной сетки, построенной по осям аргументов. В интерполяционных цифровых моделях проводится численный расчет зависимой величины в каждом узле выбранной координатной сетки, например,

методами кригинга, обратных расстояний или интерполяционных конечных элементов, с учетом влияния зафиксированных экспериментальных ее значений в точках близко расположенного окружения. Таким образом, цифровые модели ситуационно отображают в деталях частное текущее состояние техногенного явления. При этом численные значения его зависимой величины фиксируются в условиях разветвленного действия множества как закономерно влияющих, так и случайных факторов. Модель выражается матричным набором цифровых данных, которые в координатной системе аргументов представляются графическими распределениями зависимой величины. Поэтому суждения о закономерностях и связях явления возможны лишь на качественном вербальном уровне графических визуализаций и сравнений. Тем не менее цифровая фиксация и графическое отображение процессов и геопространственных объектов дает возможность выделять их структуры и содержащиеся подробности, что необходимо и весьма полезно в решениях практических задач горного производства.

Отмечая очевидную пользу, а в определенных исследованиях и необходимость цифрового моделирования, следует признать, что дискретных количественных оценок и качественных сравнений зависимой величины недостаточно для раскрытия характерных свойств ее изменения, связанного с аргументами. Из-за влияния множества отмеченных естественных природных и техногенных факторов здесь особенно важна строгая определенность, ясность и точность формулировок, выражающих постановку задачи и ее решение до стадии обнаружения, понимания и описания упомянутых связей и закономерностей. Эти требования выполняются с привлечением средств функциональной математики. Без этого не может быть науки как системы знаний. Выражение моделей и формулирование найденных закономерностей языком математики позволяет компактно их записывать, распространять и использовать подстановкой в других аналитических соотношениях, однозначно и без потерь доносить до научного сообщества и общественного сознания идеи и факты, не допуская искажений и возможности дополнительных неверных толкований. Поэтому научные задачи экспериментальных исследований наиболее объективно и системно решаются методом математического функционального моделирования. Имеется в виду не формальная и абстрактная аппроксимация изменений зависимой величины каким-либо математическим выражением, а функциональное описание ее характерных свойств и связей с аргументами. На примере имитационных моделей это означает, что для описания связей зависимой величины с аргументами необходимо по ее имитированным значениям дополнительно проводить функциональное математическое моделирование. Искомые модели двумерные, трехмерные и другой мерности наилучшим образом реализуются экспериментальным математическим функционально-факторным методом [12], где причинно-следственное влияние на зависимую величину упомянутых факторов выражается математическими функциями. Их набор и вид определяется по количеству и характеру влияния на зависимую величину значимых факторов техногенного явления. Суммарное влияние других незначимых факторов учитывается в оценках погрешности модели. Коэффициенты и параметры таких моделей, в связи с их нелинейностью, успешно идентифицируются совместно применяемыми методами наименьших квадратов и приближений параболической вершины [13].

Качество математической модели

О качестве построенной модели судят по ее соответствию целям исследований. В связи с этим дадим оценку модели с позиции ее достаточности для раскрытия и понимания связей техногенного явления, необходимых для решения научной задачи, а также для непосредственного практического применения. Поскольку моделирование проводится по разным принципам и методам, то уровень информативности моделей различается. Под таким уровнем понимается качественная и количественная оценка полученных с помощью модели сведений о связях физических величин, описывающих

и объясняющих техногенное явление и пригодных для решения научной задачи или практического применения. В связи с этим определяются важные свойства модели, состоящие в ее способности конкретно и точно в сформулированном математическом виде выражать, переносить и распространять выявленные связи явления в область экстраполяции для хронологического и геопространственного прогнозирования.

Ориентируясь на отмеченный критерий информативности моделей, выделим такие уровни извлекаемого из них нового знания, как вербальный, дискретно-количественный, формально аппроксимирующий и функционально-факторный.

На вербальном уровне знания ограничиваются качественным описанием состояния и особенностей изменения зависимой величины исследуемого техногенного явления в разных фазах его развития. Например, в модельном описании особенностей и в прогнозе зависимая величина увеличивается, уменьшается, имеет максимум, направление, изгиб и т. д.

Дискретно-количественный уровень извлекаемого из модели знания содержит, кроме качественного описания наблюдаемого явления, еще численные дискретные соотношения его зависимой величины, измеренной или оцененной в эксперименте при разных значениях аргументов. Например, установлено, во сколько раз зависимая величина увеличивается или уменьшается, образуется ее разность или сумма и т. д.

Формально аппроксимирующий уровень знания заключается в определенном виде и конкретном выражении элементарной математической функции, например, логарифмической, степенной, полиномиальной, которая формируется и подбирается по признаку наименьших ее отклонений от экспериментальных значений зависимой величины. При формальном подходе подобранная функция не объясняет связи техногенного явления и не дает прогноз. Она лишь формально математически описывает усредненное изменение зависимой величины в области интерполяции данных эксперимента.

Знания функционально-факторного уровня извлекаются из одноименных математических моделей, где, кроме качественных и дискретных количественных оценок экспериментально измеренных значений зависимой величины наблюдаемого явления, дается объясняющее причинно-следственное описание ее связей с аргументами, обладающее свойством функционального прогноза. Узнаются характерные особенности развития явления, выраженные конкретными значениями описывающих параметров и коэффициентов, например, показателем степени, интервалом релаксации, амплитудой, экстремумом, асимптотой.

Качества созданной модели, наряду с уровнем извлекаемого научного знания, оцениваются также ее погрешностью. Соответствующий доверительный интервал возможных отклонений от моделируемой зависимой величины как степень ее ошибочности связан со случайным рассеиванием результатов экспериментов, по которым создана модель, и полнотой аналитического учета в ней влияния значимых факторов явления. Единственный способ определения достоверности модели заключается в проверке соответствия ее выводов результатам эксперимента. Модель достоверно отображает особенности развития техногенного явления, когда ее погрешность, определенная как среднеквадратичная невязка моделируемых и экспериментальных значений зависимой величины, не отличается существенно от среднеквадратичной погрешности самих экспериментальных оценок или измерений. При соблюдении этого требования из модели извлекаются закономерности, под которыми понимаются объективно существующие устойчивые связи явления, объясняющие особенности его развития и воспроизводимые при его повторных и многократных реализациях. В частности, добавим, что достоверность моделирования зависимой величины техногенного явления, проведенного методами имитаций, в том числе методом экстраполированных конечных элементов, при отсутствии сравнительного анализа его соответствия экспериментальным измерениям следует считать недоказанной. Тогда выводы моделей ставятся под сомнение, поскольку

ку из-за принятых теоретических допущений и аналитических аппроксимаций они могут существенно отличаться от объективной реальности.

В качестве примера, иллюстрирующего уточнение и развитие уровней научного знания, извлекаемого из моделей, приведем результаты экспериментальных исследований горизонтальных деформаций вертикального ствола шахты [14]. Они возникают по мере углубления забоя ствола и на некоторой высоте от него стабилизируются. Исследования проведены на шахтах Донского горно-обогатительного комбината. На разной высоте h_i от забоя, имеющего конфигурацию окружности с диаметром d_0 , измерены текущие диаметры d_i ствола, деформированного под действием окружающих ультраосновных горных пород. На рис. 2, а показано экспериментальное распределение точек относительных диаметров d_i/d_0 ствола шахты, измеренных на разной относительной высоте h_i/d_0 от его забоя. Среднеквадратичная погрешность измерений 0,0022 обозначена горизонтальными интервалами. Научная задача исследований состоит в поиске закономерностей, описывающих и объясняющих деформацию ствола, а практическая цель заключается в их учете и применении при его строительстве и проходке.

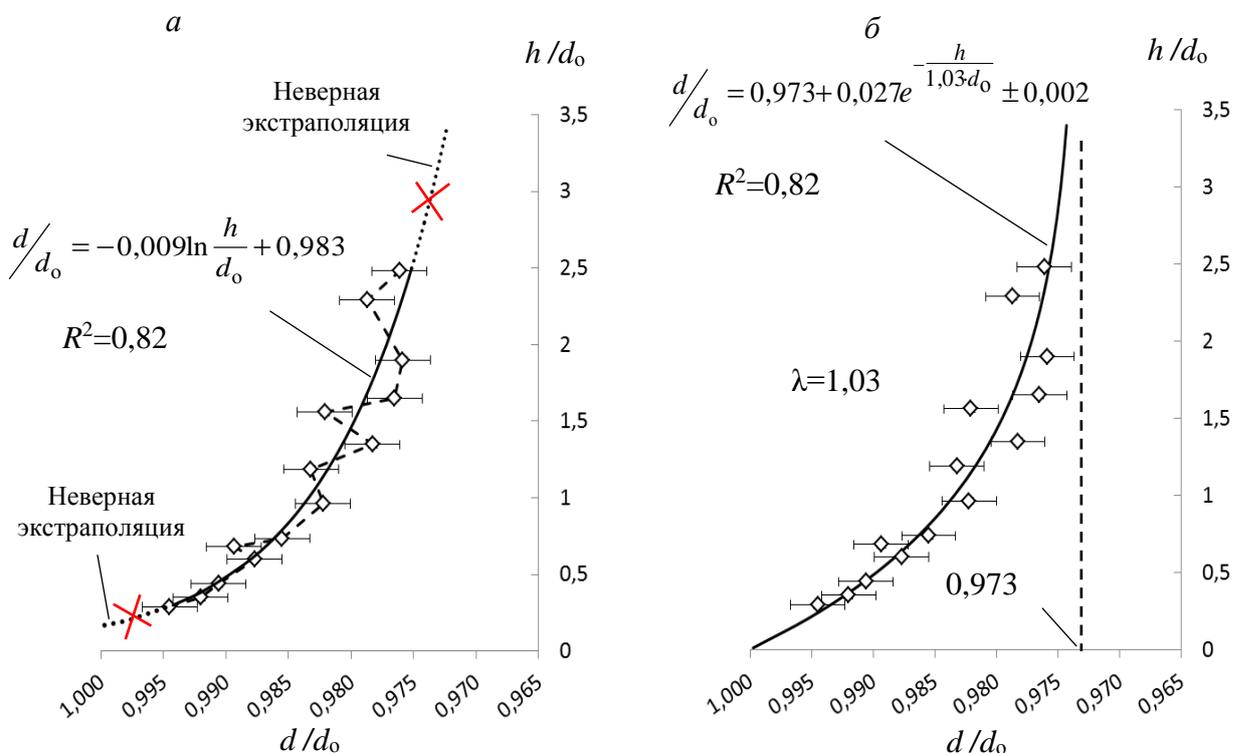


Рис. 2. Формально аппроксимирующий (а) и функционально-факторный (б) уровни полученных новых знаний в экспериментальном моделировании горизонтальной деформации ствола шахты

На вербальном уровне знаний о деформации ствола шахты, извлеченных из обзора графического распределения экспериментальных точек, следует, что по мере увеличения высоты над забоем шахты относительный ее диаметр выпукло уменьшается. На рис. 2, а показана часто употребляемая иллюстрация связей наблюдаемого явления, в данном случае деформации, в виде межточечной линейной интерполяции (пунктир), которая при наличии случайной погрешности ошибочна и неуместна. Ведь в повторном эксперименте из-за перераспределенного расположения точек в пределах допускаемой погрешности эти пунктирные связи изменятся и будут другими. На дискретном количественном уровне знаний уточняется, что при изменении относительной высоты над забоем ствола шахты от 0,5 до 2,5 его диаметр уменьшается в 1,015 раза. Полученные знания о деформации на формальном аппроксимирующем уровне заключаются в том,

что изменение диаметра ствола между точками экспериментальных измерений наилучшим образом, по признаку ближайшего расположения с коэффициентом детерминации 0,82, описывается логарифмической функцией, вид и график которой показан на рис. 2, а. Однако в интервалах ее экстраполяции, выделенных на графике точками, принятая аппроксимация неверна и неприемлема, так как при малом превышении над забоем относительный диаметр ствола не может быть больше единицы, а при больших высотах он бесконечно не уменьшается. На функционально-факторном уровне знаний о деформации ствола шахты учитывается влияние на нее пластичных и упругих свойств горных пород. Знания, извлекаемые из математической модели, показанной на рис. 2, б, состоят в том, что относительный диаметр ствола шахты по мере увеличения относительной высоты от забоя уменьшается из-за пластичности горных пород экспоненциально от единицы и, под противодействующим влиянием их упругих свойств, приближается с интервалом ее релаксации $\lambda=1,03$ к стабилизированному значению 0,973. Из сравнений результатов моделирования становится очевидным, что наиболее глубокие и точные знания о закономерностях деформации ствола шахты получены в функционально-факторной модели. Эти знания применяют в проектировании проходки и крепи вертикальных стволов.

Выбирая и применяя в исследованиях горного производства функциональные и цифровые модели, следует учитывать, что в цифровых моделях, как уже отмечалось, фиксируется влияние на зависимую величину явления не только устойчиво повторяющихся закономерных, но и случайных факторов. Поскольку связи зависимой величины с аргументами в таких моделях не отображаются, то экстраполяционное прогнозирование ими невозможно. Поэтому содержание подробной цифровой модели, весьма полезное в решениях частной практической задачи, может оказаться неприемлемым для поиска и выражения закономерностей в научной задаче. Верно и обратное. Функциональная модель со сглаженным влиянием случайных факторов, предназначенная для понимания и прогнозирования происходящих техногенных процессов, недостаточна для детального описания их локальных особенностей. Проиллюстрируем это положение на следующем практическом примере моделирования конфигурации кровли продуктивного пласта золотоносной россыпи, расположенной на участке реки Медведки в границах Мостовской группы месторождений [15].

Функционально-факторная и цифровая интерполяционная модели кровли золотоносного пласта построены по вертикальным отметкам H_i разведочных скважин, в которых по результатам геологическим опробованием керна зафиксирована со случайной погрешностью 1,17 м верхняя граница залегания золотоносных песков. В структуре функциональной модели учтено влияние факторов руслового аллювиального формирования рельефа пласта по его простиранию и в крест простирания. Цифровая модель рассчитана по сеточному интерполяционному методу локализованного весового усреднения вертикальных отметок двумерной функцией Гаусса. Полученные модели показаны на рис 3.

Функциональная модель предназначена для геопространственного прогнозирования и оценок запаса золота. Для этого используются ее параметры: релаксационный интервал $\lambda=367$ м, характеризующий экспоненциальное падение кровли продуктивного пласта по оси Y до вертикальной отметки 185,8 м, а также соответственно изменяющиеся показатели $(-5,53; -4,58)$, $(15,79; 15,87)$ степенных функций. Они описывают вогнутость кровли в направлении ее простирания по X . Цифровая модель предназначена для оперативного управления вскрышных и выемочных горных работ, поскольку особенности рельефа кровли золотоносного пласта в ней отображаются более детально, чем в модели функциональной. Однако вероятность практического подтверждения этой детальности невысока из-за учета в модели случайных отклонений в зафиксированных вертикальных отметках кровли в скважинах. На рис. 3 (в) показано, что при повторном геологическом опробовании на выбранном профиле эти отметки перераспределяются.

Если провести заново моделирование по данным повторного геологического опробования, то функциональная модель существенно не изменяется и ее график в сечении А-А остается прежним. Рельеф кровли пласта, первоначально построенный по цифровой модели и изображенный в сечении Б-Б (см. рис. 3 г), будет изменен и покажет другие локальные отклонения в его конфигурации.

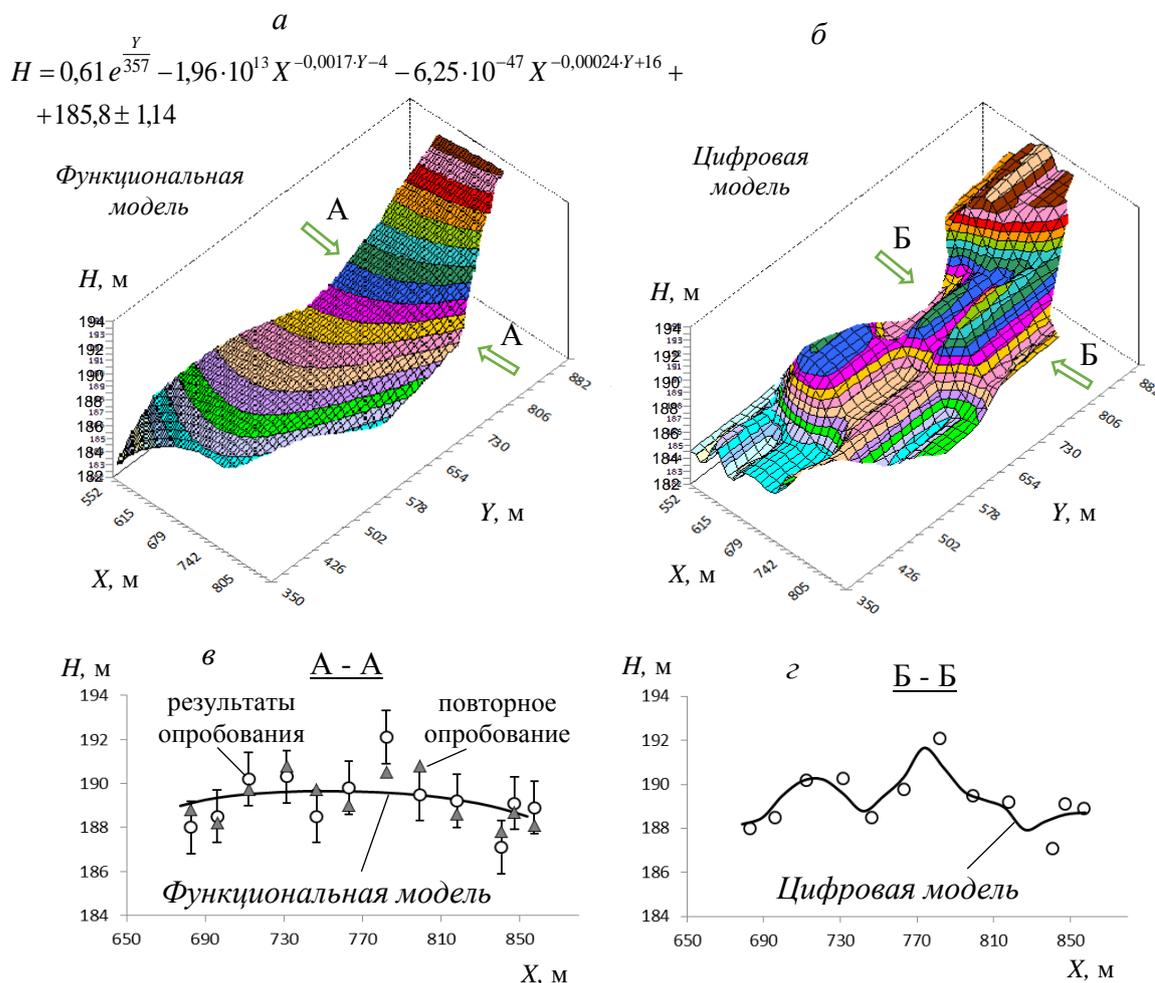


Рис. 3. Графические изображения функциональной (а), (в) и цифровой (б), (г) модели кровли продуктивного золотоносного пласта

Заключение

Изложенный системный подход к экспериментальному математическому моделированию техногенных явлений дает целостное представление о выборе его методов и типа моделей, обеспечивающих получение новых знаний и ранее неизвестной дополнительной информации об особенностях его развития, необходимых для решения поставленной научной и практической задачи горного производства.

Приведенные состав и структура математического моделирования показывают связь и зависимость выбранного принципа построения модели от цели горно-технологических, геомеханических и экологических исследований. Модели функционального типа отображают влияние на зависимую величину техногенного явления устойчиво действующих факторов и предназначены для решения научной задачи поиска закономерностей ее изменения, по которым осуществляется прогнозирование и соответствующее планирование производства. По результатам более подробного цифрового моделирования, дополнительно фиксирующего действие случайных факторов, принимаются частные ситуационные производственные решения.

Отмеченные уровни нового вербального, дискретно-количественного, формально аппроксимирующего и функционально-факторного знания о горно-технологических процессах, извлекаемого из математической модели, наряду с ее погрешностью, показывают степень ее научной значимости и полезности практического применения.

Список литературы

1. Янкевский А.В., Паламарчук М.Е., 2007. Математическое моделирование как основа совершенствования технологических и техногенных процессов горного производства. *Вестник РУДН, Инженерные исследования*, № 3, С. 89 - 91.
2. Розенберг И.Н., 2016. Геоинформационное моделирование как фундаментальный метод познания. *Перспективы науки и образования*, № 3 (21), С. 12 - 15.
3. Бабич В.Н., Кремлёв А.Г., Сиразутдинова Н.Б., 2009. Методология математического моделирования в задачах горного производства. *Альманах современной науки и образования*, № 11 (30), Ч. 1, С. 9 - 13.
4. Маркелов Г.Е., 2005. Основные принципы построения математических моделей. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Естественные науки*, № 4, С. 59 - 70.
5. Соколов А.В., Волошинов В.В., 2018. Выбор математической модели: баланс между сложностью и близостью к измерениям. *International Journal of Open Information Technologies*, Т. 6, № 9, С. 33 - 41.
6. Синчуков А.В., 2016. Современная классификация математических моделей. *Инновационная наука*, № 3, С. 215 - 216.
7. Алиев Т.И., 2009. *Основы моделирования дискретных систем*. Санкт-Петербург: Университет ИТМО, 363 с.
8. Козлова О.Ю., 2022. Опыт применения и перспективы развития имитационного моделирования в горном деле. *Уголь*, № 5, С. 42 - 45.
9. Бабина О.И., 2009. Сравнительный анализ имитационных и аналитических моделей. *Материалы конференции. Имитационное моделирование. Теория и практика: Сб. докл.*, С. 73-77.
10. Новаковский Б.А., Пермяков Р.В., 2019. *Комплексное геоинформационно-фотограмметрическое моделирование рельефа*. Москва: Изд-во МИИГАиК, 175 с.
11. Мусихин В.В., Курков Ю.С., 2013. Создание цифровой модели местности с помощью данных радарной радиолокационной съемки. *Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Геология. Нефтегазовое и горное дело*, т. 12, № 9, С. 116 - 124.
12. Антонов В.А., 2017. Методология геоинформационного отображения экспериментальных горно-технологических закономерностей. *Горный информационно-аналитический бюллетень*, № 10, С. 17 - 24.
13. Антонов В.А., 2013. Построение и оптимизация моделей нелинейной функционально-факторной регрессии. *Информационные технологии*, № 5, С. 17 - 24.
14. Харисов Т.Ф., Антонов В.А., 2015. Исследование деформации горных пород в процессе проходки вертикального ствола. *Горный информационно-аналитический бюллетень*, № 3, С. 146 - 150.
15. Антонов В.А., Аленичев В.М., 2018. О мониторинге геоданных и моделировании продуктивного пласта россыпного месторождения золота. *Маркшейдерия и недропользование*, № 3 (95), С. 56 - 59.

References

1. Yankevskii A.V., Palamarchuk M.E., 2007. Matematicheskoe modelirovanie kak osnova sovershenstvovaniya tekhnologicheskikh i tekhnogennykh protsessov gornogo proizvodstva [Mathematical modeling as a basis for improving technological and technogenic

processes of mining production.]. Vestnik RUDN, Inzhenernye issledovaniya, № 3, P. 89 - 91.

2. Rozenberg I.N., 2016. Geoinformatsionnoe modelirovanie kak fundamental'nyi metod poznaniya [Geoinformation modeling as a fundamental method of knowledge]. Perspektivy nauki i obrazovaniya, № 3 (21), P. 12 - 15.

3. Babich V.N., Kremlev A.G., Sirazutdinova N.B., 2009. Metodologiya matematicheskogo modelirovaniya v zadachakh gornogo proizvodstva [Methodology of mathematical modeling in mining production problems]. Al'manakh sovremennoi nauki i obrazovaniya, № 11 (30), Ch. 1, P. 9 - 13.

4. Markelov G.E., 2005. Osnovnye printsipy postroeniya matematicheskikh modelei [Basic principles of constructing mathematical models]. Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Estestvennye nauki, № 4, P. 59 - 70.

5. Sokolov A.V., Voloshinov V.V., 2018. Vychor matematicheskoi modeli: balans mezhdu slozhnost'yu i blizost'yu k izmereniyam [Selection of a mathematical model: a balance between complexity and proximity to measurements]. International Journal of Open Information Technologies, Vol. 6, № 9, P. 33 - 41.

6. Sinchukov A.V., 2016. Sovremennaya klassifikatsiya matematicheskikh modelei [Modern classification of mathematical models]. Innovatsionnaya nauka, № 3, P. 215 - 216.

7. Aliev T.I., 2009. Osnovy modelirovaniya diskretnykh sistem [Fundamentals of modeling discrete systems]. Sankt-Peterburg: Universitet ITMO, 363 p.

8. Kozlova O.Yu., 2022. Opyt primeneniya i perspektivy razvitiya imitatsionnogo modelirovaniya v gornom dele [Experience of application and prospects of development of simulation modeling in mining]. Ugol', № 5, P. 42 - 45.

9. Babina O.I., 2009. Sravnitel'nyi analiz imitatsionnykh i analiticheskikh modelei. Materialy konferentsii. Imitatsionnoe modelirovanie [Comparative analysis of simulation and analytical models]. Teoriya i praktika: Sb. dokl, P. 73-77.

10. Novakovskii B.A., Permyakov R.V., 2019. Kompleksnoe geoinformatsionno-fotogrammetricheskoe modelirovanie rel'efa [Complex geoinformation and photogrammetric modeling of the relief]. Moscow: Izd-vo MIIGAiK, 175 p.

11. Musikhin V.V., Kurkov Yu.S., 2013. Sozdanie tsifrovoi modeli mestnosti s pomoshch'yu dannykh radarnoi radiolokatsionnoi s'emki [Creation of digital terrain models using the data of radar photography]. Vestnik Permskogo natsional'nogo issledovatel'skogo politekhnicheskogo universiteta. Geologiya. Neftegazovoe i gornoe delo, Vol. 12, № 9, P. 116 - 124.

12. Antonov V.A., 2017. Metodologiya geoinformatsionnogo otobrazheniya eksperimental'nykh gorno-tekhnologicheskikh zakonomernostei [Methodology of geoinformation mapping of experimental mining and technological patterns]. Gornyi informatsionno-analiticheskii byulleten', № 10, P. 17 - 24.

13. Antonov V.A., 2013. Postroenie i optimizatsiya modelei nelineinoi funktsional'no-faktornoj regressii [Construction and optimization of models of nonlinear functional factor regression]. Informatsionnye tekhnologii, № 5, P. 17 - 24.

14. Kharisov T.F., Antonov V.A., 2015. Issledovanie deformatsii gornykh porod v protsesse prokhodki vertikal'nogo stvola [Study of the deformation of rocks in the process of vertical shaft sinking]. Gornyi informatsionno-analiticheskii byulleten', № 3, P. 146 - 150.

15. Antonov V.A., Alenichev V.M., 2018. O monitoringe geodannykh i modelirovaniy produktivnogo plasta rossypnogo mestorozhdeniya zolota [On the monitoring of the geodata and modeling of productive layer of placer gold deposits]. Marksheideriya i nedropol'zovanie, № 3 (95), P. 56 - 59.