

УДК 622:519.87

**Антонов Владимир Александрович**  
главный научный сотрудник,  
доктор технических наук,  
Институт горного дела УрО РАН,  
620075, г. Екатеринбург,  
ул. Мамина-Сибиряка, 58.  
e-mail: [Antonov@igduran.ru](mailto:Antonov@igduran.ru)

### СМЫСЛОВАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ФАКТОРНЫХ МОДЕЛЕЙ ГЕОМЕХАНИЧЕСКИХ ЯВЛЕНИЙ

#### Аннотация:

Изложена методология построения и смысловой интерпретации функционально-факторных моделей экспериментально наблюдаемых геомеханических явлений горного производства. Методология включает структуру моделирования и приемы смысловой интерпретации наиболее востребованных в научных исследованиях двумерных моделей, рассчитываемых компьютерной программой "Тренды ФСП-1" и содержащих одну или две степенные или экспоненциальные функции, сопряженные с постоянной составляющей или наклонной асимптотой. В приемах смысловой интерпретации моделей учитывается влияние причинных факторов – воздействующих обстоятельств и процессов геомеханического явления, приводящих при росте аргумента к подъему или спаду его зависимой величины. Особенности ее изменений выражаются модельными параметрами соответствующих факторных функций, дающими конкретное представление – как круто или полого и во сколько раз они увеличиваются или уменьшаются при росте аргумента на обусловленный интервал. Сформулированное таким образом описание изменений зависимой величины, характеризуемых влиянием причинных факторов, функциональными параметрами и коэффициентами, составляет суть обнаруженных новых знаний об исследуемом явлении. В качестве иллюстрации смысловой интерпретации моделей приведены пять практических примеров экспериментальных геомеханических исследований. На примерах показано, что по данной методологии достигается главная их цель – установить и объяснить закономерности становления и развития наблюдаемого явления. Смысловая интерпретация модели, сформулированная по аналогии с приведенными примерами, может составить защищаемое научное положение в диссертационном исследовании.

**Ключевые слова:** геомеханическое явление горного производства, данные эксперимента, влияющие факторы, математическая функциональная модель, смысловая интерпретация.

DOI: 10.25635/2313-1586.2023.04.017

**Antonov Vladimir A.**  
Chief Researcher  
Doctor of Engineering Sciences,  
Institute of Mining, Ural Branch of RAS,  
620075 Ekaterinburg,  
58 Mamina-Sibiryaka Str.  
e-mail: [Antonov@igduran.ru](mailto:Antonov@igduran.ru)

### SEMANTIC INTERPRETATION OF FUNCTIONAL-FACTORY MODELS OF GEOMECHANICAL PHENOMENA

#### Abstract:

The paper concerns the methodology of construction and semantic interpretation of functional-factorial models of experimentally observed geomechanical phenomena in mining. The methodology includes the structure of modeling and methods of semantic interpretation of the two-dimensional models most in demand in scientific research, calculated by the computer program "FSP-1 Trends" and containing one or two power or exponential functions associated with a constant component or an oblique asymptote. In the methods of semantic interpretation of models, the influence of causal factors is taken into account – the influencing circumstances and processes of the geomechanical phenomenon, leading, with the growth of the argument, to the rise or fall of its dependent value. The features of such changes are expressed by the model parameters of the functions, which give a specific idea – how steep or flat and how many times they increase or decrease with the growth of the argument by a specified interval. The description of changes in the dependent value formulated in this way, characterized by the influence of causal factors, functional parameters and coefficients, is the essence of the discovered new knowledge about the phenomenon under study. As an illustration of the semantic interpretation of the models, five practical examples of experimental geomechanical studies are given. The examples show that this methodology achieves their main goal – to establish and explain the patterns of formation and development of the observed phenomenon. The semantic interpretation of the model, formulated by analogy with the examples given, can constitute a defended scientific position in dissertation research.

**Key words:** geomechanical phenomenon of mining, experimental data, influencing factors, mathematical functional model, semantic interpretation.

## Введение

Исследования геомеханических явлений напряженно-деформированного состояния сложных по структуре и составу массивов горных пород и техногенных объектов горного производства проводятся для оценки и прогнозирования степени безопасности ведения горных работ и содержания отмеченных объектов [1, 2]. Они осуществляются чаще всего эмпирическими методами на основе результатов натуральных измерений или имитационно-численных экспериментов. Методологическим приемом исследований традиционно остается моделирование геомеханических процессов по данным, полученным в опытах и экспериментах [3 – 5]. Цель моделирования состоит в раскрытии и понимании их связей, извлечении из них новых знаний о геомеханических процессах, дающих целостностное представление о состоянии и закономерностях развития наблюдаемого геомеханического явления.

Отмеченный подход к моделированию и достижению его цели в большинстве экспериментальных исследований в полной мере не реализуется из-за недостатка соответствующего методологического и математического обеспечения. Чаще всего исследования ограничиваются, к сожалению, лишь уровнем вербального толкования локальных особенностей графиков зафиксированных значений геомеханических величин либо уровнем их формально-статистической аппроксимации моделями регрессии, содержащимися в широко распространенной компьютерной программе "Microsoft Excel". Однако математические выражения полученных моделей, например, полиномиальных, остаются лишь формулами, поскольку не имеют смысловой интерпретации, т.е. не отражают физическую суть исследуемых механических процессов [6, 7]. Очевидно, что здесь требуется не формальная аппроксимация экспериментальных данных, а учет содержательной информации о геомеханическом процессе, раскрывающей характерные свойства их связей.

В данной статье приведены результаты методологических исследований в отмеченном направлении. Рассмотрена содержательная структура и смысловая интерпретация наиболее востребованных в научных исследованиях двумерных функционально-факторных степенных и экспоненциальных математических моделей, раскрывающих характерные особенности связей экспериментально наблюдаемого геомеханического явления.

### *Структура моделирования и интерпретации*

Содержательный анализ связей и свойств экспериментальных данных осуществляется по методологии нелинейного функционально-факторного моделирования [8], развитой в Институте горного дела УрО РАН. Основная ее суть состоит в формировании моделей наблюдаемых явлений математическими функциями, описывающими особенности изменения данных эксперимента по принципу учета влияющих факторов, т.е. воздействующих причинных обстоятельств и процессов геомеханического явления. Структура функционально-факторного моделирования геомеханических процессов и явлений приведена в табл. 1. Действие каждого причинного фактора, приводящее по мере роста аргументов – независимых величин – к монотонному увеличению или уменьшению зависимой физической величины, выражается математической функцией. Оптимальные параметры функций, например, показатели степени, рассчитываются и определяются специально разработанным методом приближений параболической вершины (МППВ) [9] как рациональные числа (дробные, положительные, отрицательные) по критерию наилучшего приближения модели к данным эксперимента.

Наиболее востребованы в научных геомеханических исследованиях двумерные функционально-факторные модели с постоянной составляющей и степенными или экспоненциальными функциями, отображающие деформационные и динамические процессы, происходящие в массивах горных пород и объектах инженерной инфраструктуры. Расчет и построение таких моделей реализуется компьютерной программой "Трен-

ды ФСП-1" [10] (тренды функционально-факторные с самоопределяющимися параметрами). Построенные модели имеют повышенный коэффициент детерминации, указывающий на их близкое приближение к данным эксперимента. Однако широкое их применение в научных исследованиях сдерживается, поскольку без смысловой интерпретации они остаются по-прежнему лишь формальными.

Таблица 1

**Структура функционально-факторного моделирования и интерпретации**

Вид геомеханического явления	Аргументы модели	Влияющие факторы	Смысловая Интерпретация модели
Формирование и пространственно-временное развитие напряженно-деформированного состояния приконтурного горного массива	Геопространственные и временные координаты	Изменяющиеся в пространстве и времени деформационные, структурные и другие свойства горного массива	Функциональное описание и пояснение характерных особенностей становления и развития напряженно-деформированного состояния горного массива
Изменение напряженно-деформированного состояния горных техногенных объектов	Конфигурационные и технологические параметры техногенных объектов	Изменяющиеся режимы горных работ и сопутствующих геомеханических процессов	Функциональное описание и пояснение напряженно-деформированного состояния техногенных объектов
Изменение зависимой физической величины, характеризующей геомеханические свойства горных пород и массивов	Независимые физические величины геомеханического явления	Процессы и механизм причинного изменения зависимой величины	Функциональное описание и пояснение особенностей связи зависимой величины с аргументами

Под смысловой интерпретацией понимается пояснение свойств исследуемого геомеханического явления по полученной модели в следующих трех аспектах:

– указать причинный процесс (фактор), влияющий на общее или локальное изменение зависимой физической величины геомеханического явления (рост или спад ее значений);

– дать разъяснение – как модельные параметры отображают характерные особенности изменения зависимой величины геомеханического явления, происходящего под влиянием факторов при росте аргумента;

– отметить уровень достоверности модели, т.е. ее погрешность в обусловленном доверительном интервале.

Влияющий фактор определяется из теоретических или экспериментальных представлений о природе, источнике причинного обстоятельства или процесса, изменяющего физическую величину наблюдаемого явления при разных значениях аргумента в каждом конкретном исследовании. Причинными факторами могут быть, например, изменяющиеся в геопространственных координатах свойства горных пород (упругость, пластичность, трещиноватость и т.д.), а также наличие их неоднородной структуры или переменного влияния на результаты экспериментальных наблюдений конфигурации и ориентиров горной выработки.

Особенности криволинейного функционального изменения зависимой величины выражаются значениями содержащихся в моделях параметров, которые дают четкое представление – как круто или полого и во сколько раз функции увеличиваются или

уменьшаются при росте аргумента на обусловленный интервал. При этом изменение функции может быть выпуклым или вогнутым. Если провести прямую линию, соединяющую две точки ее графика, построенного в правосторонней системе координат в пределах одной монотонности, то при расположении прямой над графиком он считается выпуклым вниз или просто выпуклым. Если прямая линия окажется под графиком, то он (с выпуклостью вверх) считается вогнутым. При наличии двух противоположных монотонностей в данных эксперимента график зависимой величины в построенной модели может иметь перегиб или экстремум.

Характерные особенности моделируемого изменения зависимой величины содержатся также в толковании коэффициента  $A$ , умножаемого на факторную функцию, и постоянной составляющей  $B$ . Наличие ее в модели свидетельствует о смещенной относительности исследуемого геомеханического процесса, когда существует начальное (фоновое) или асимптотическое значение зависимой физической величины. По мере роста аргумента факторная функция удаляется или приближается к нему. В частном случае отсутствия смещенной относительности  $B=0$ . Если по смыслу исследуемого процесса необходимо исключить влияние постоянной составляющей, то построение модели проводится по смещенным данным эксперимента на интервал  $x_0$  или  $y_0$ .

Уровень достоверности модели может быть выражен относительной ее погрешностью или среднеквадратичным отклонением зависимой величины от данных эксперимента. Поскольку они тоже зарегистрированы со случайным разбросом воспроизводимости, то достоверной является модель, погрешность которой соизмерима с погрешностью эксперимента.

#### *Интерпретация моделей, содержащих степенные функции*

Рассмотрим модели, описывающие изменение зависимой величины  $y$  постоянной составляющей  $B$  и одной или двумя степенными функциями вида  $Ax^\mu$ , где  $\mu$  – показатель степени,  $x$  – аргумент ( $x > 0$ ). Выделим два значения одной функции, взятых при аргументе  $x$  и увеличенном аргументе на интервал  $\Delta x$  ( $x+\Delta x$ ). Отношение значений представим в виде дроби

$$\frac{A(x+\Delta x)^\mu}{Ax^\mu} = \left(\frac{\Delta x}{x} + 1\right)^\mu = K_a^\mu = K$$

Данное соотношение имеет следующее толкование. При заданном относительном приросте аргумента на долю  $\Delta x/x$ , т. е. его увеличении в  $K_a$  раз, значение степенной функции с показателем  $\mu$  увеличивается или уменьшается в  $K$  раз. График изменений отношения  $K$  при разном показателе степени и относительном приросте аргумента показан на рис. 1.

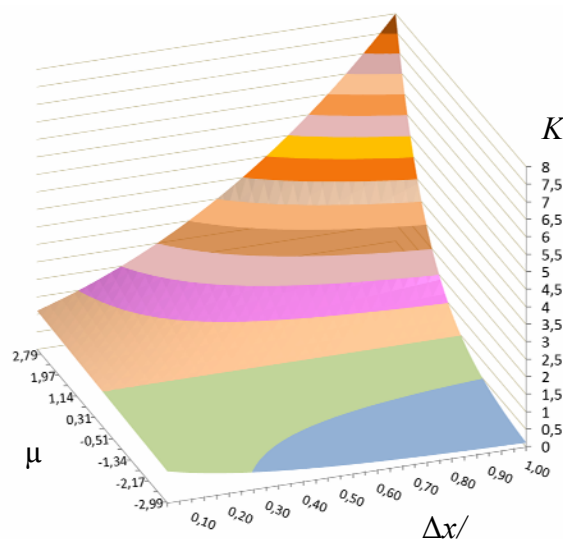


Рис. 1. График изменения отношения  $K$

Отметим характерные особенности изменения степенной функции. Они определяются соотношением параметров  $K$  и  $K_a$ . При нулевом показателе степени ( $\mu=0$ ) отношение  $K$  при любых приращениях аргумента равно единице. При значениях  $\mu>0$  получаем функциональное увеличение зависимой величины ( $K>1$ ). Если показатель  $\mu$  находится в интервале  $0<\mu<1$ , то функция увеличивается в меньшей степени, чем аргумент ( $K<K_a$ ). Когда показатель степени больше единицы ( $\mu>1$ ), то она увеличивается в большей степени ( $K>K_a$ ). При отрицательных значениях показателя степени ( $\mu<0$ ) отношение  $K$  оказывается в интервале  $0<K<1$ , т. е. зависимая величина уменьшается в  $K$  раз.

Возможна более обобщенная интерпретация характерных изменений физической величины, описываемых степенной функцией. Логарифмируя уравнение связи между  $K_a^\mu$  и  $K$ , представим его в виде соотношения

$$\ln K = \mu \ln K_a.$$

Его толкование состоит в том, что логарифм относительного изменения физической величины прямо пропорционален логарифму соответствующего относительного роста аргумента. Коэффициентом пропорциональности является показатель степени  $\mu$ . Графики связей этих параметров показаны на рис. 2.

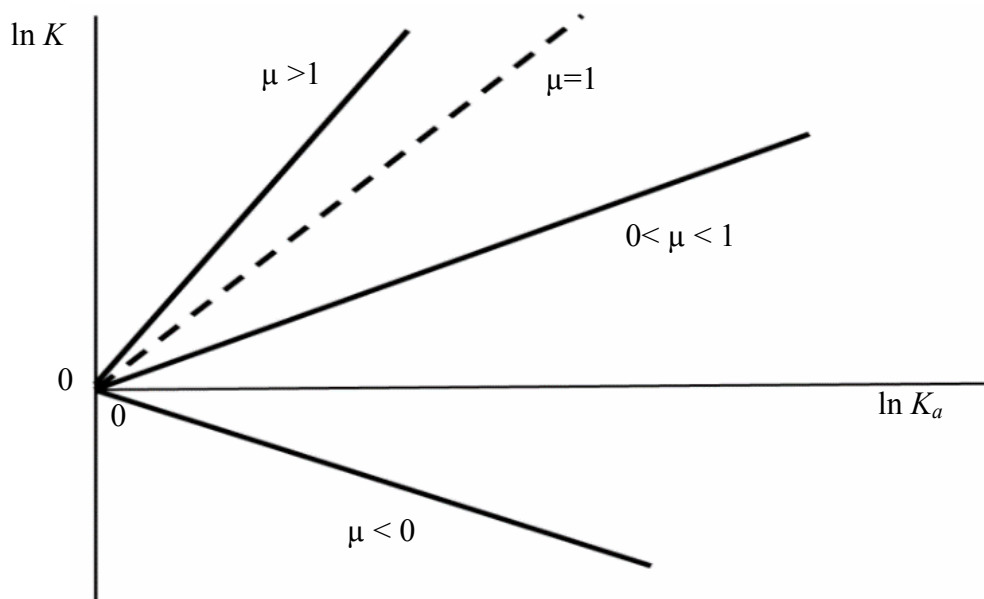


Рис. 2. Графики связей параметров степенной функции

Изменения зависимой величины во многих геомеханических процессах описываются степенной функцией с учетом ее сопряжения не с постоянной составляющей  $B$ , а с наклонно расположенной асимптотой. Она выражается линейной функцией с угловым коэффициентом  $B_x$ . Смысл коэффициента  $A$  в модели представляется частным значением функции, когда аргумент равен единице ( $x=1$ ). Варианты построения и смысловой интерпретации моделей, содержащих степенную функцию зависимой величины в сочетании с постоянной составляющей или с наклонной асимптотой, приведены в табл. 2.

Таблица 2

Интерпретация моделей со степенной функцией, содержащих постоянную составляющую  $y = Ax^\mu + B$  или наклонную асимптоту  $y = Ax^\mu + B_x x + B$

Знак коэф. $A$	Знак показателя $\mu$	Типичный график	Интерпретация характерных $K$ -изменений степенной функции $K = K_a^\mu$
$A > 0$	$\mu > 0$		Увеличивается от значения постоянной составляющей $B$ так вогнуто ( $0 < \mu < 1$ ) или выпукло ( $\mu > 1$ ), что при росте аргумента в $K_a$ раз превышает над ней в меньшей степени в $K < K_a$ раз или, соответственно, в большей степени в $K > K_a$ раз ( $K > 1$ )
$A < 0$			Уменьшается от значения постоянной составляющей $B$ так выпукло ( $0 < \mu < 1$ ) или вогнуто ( $\mu > 1$ ), что при росте аргумента в $K_a$ раз понижается от нее в меньшей степени в $K < K_a$ раз или, соответственно, в большей степени в $K > K_a$ раз ( $K > 1$ )
$A > 0$	$\mu < 0$		Уменьшается, приближаясь сверху к постоянной составляющей $B$ или наклонной асимптоте с отрицательным угловым коэффициентом $B_x$ так выпукло, что с ростом аргумента в $K_a$ раз превышение над ними уменьшается в $K$ раз ( $K < 1$ )
$A < 0$			
$A > 0$	$\mu < 0$		Увеличивается, приближаясь снизу к постоянной составляющей $B$ или наклонной асимптоте с положительным угловым коэффициентом $B_x$ так вогнуто, что при росте аргумента в $K_a$ раз интервал до них сокращается в $K$ раз ( $K < 1$ )
$A < 0$			

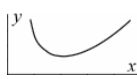
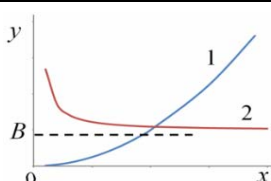
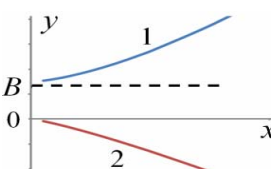
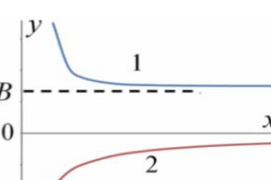

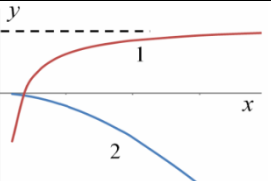
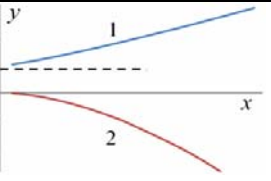
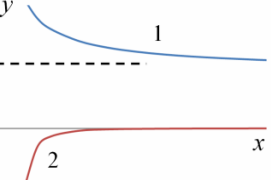
Физическая величина некоторых сложных геомеханических явлений изменяется под влиянием двух противоположно действующих факторов. Один из них приводит к росту физической величины, а другой – к ее спаду. В модели это отображается двумя соответствующими факторными функциями с противоположными монотонностями. Положение разделяющего их экстремума определяется дифференцированием математического выражения модели с последующим приравниванием полученного результата к нулю. В итоге получаем следующую формулу расчета значения аргумента  $x_3$ , при котором зависимая величина имеет экстремум (максимум или минимум)

$$x_3 = \left( -\frac{\mu_2 A_2}{\mu_1 A_1} \right)^{\frac{1}{\mu_1 - \mu_2}}$$

Таблица 3

## Интерпретация моделей с двумя степенными функциями, образующими экстремум

$$y = A_1 x^{\mu_1} + A_2 x^{\mu_2} + B$$

Знак коэф. $A$	Знак и показатель $\mu$	Графики факторных функций	Варианты интерпретации характерных $K$ -изменений факторных степенных функций $K_1 = K_a^{\mu_1}$ , $K_2 = K_a^{\mu_2}$
Функция $y$ выпуклая с минимумом 			
$A_1 > 0$ $A_2 > 0$	$\mu_1 > 0$ $\mu_2 < 0$		Влияние функции фактора 2 уменьшается в $K_2$ раза, приближая ее совместно с постоянной составляющей к значению $B$ , а влияние функции фактора 1 увеличивается в большей степени в $K_1$ раз ( $K_1 > 1$ , $K_2 < 1$ , $K_1 > K_2$ )
$A_1 > 0$ $A_2 < 0$	$\mu_1 > 0$ $\mu_2 > 0$ $\mu_1 > \mu_2$		Влияние функции 2 отрицательного фактора возрастает в $K_2$ раза, а противоположное влияние функции 1 положительного фактора увеличивается в большей степени от значения постоянной составляющей $B$ в $K_1$ раз ( $K_1 > 1$ , $K_2 > 1$ , $K_1 > K_2$ )
	$\mu_1 < 0$ $\mu_2 < 0$ $\mu_1 < \mu_2$		Влияние функции 1 положительного фактора уменьшается в $K_1$ раз, приближая ее совместно с постоянной составляющей к значению $B$ , а противоположное влияние функции 2 отрицательного фактора слабеет в меньшей степени в $K_2$ раза ( $K_1 < 1$ , $K_2 < 1$ , $K_1 < K_2$ )
Функция $y$ вогнутая с максимумом 			
$A_1 < 0$ $A_2 < 0$	$\mu_1 < 0$ $\mu_2 > 0$		Влияние функции фактора 1 сокращается в $K_1$ раза, приближая ее совместно с постоянной составляющей к значению $B$ , а отрицательная функция фактора 2 увеличивается в большей степени в $K_2$ раз ( $K_1 < 1$ , $K_2 > 1$ , $K_1 < K_2$ )
$A_1 > 0$ $A_2 < 0$	$\mu_1 > 0$ $\mu_2 > 0$ $\mu_1 < \mu_2$		Влияние функции положительного фактора 1 увеличивается в $K_1$ раз от значения постоянной составляющей $B$ , а противоположное влияние функции отрицательного фактора 2 возрастает в большей степени в $K_2$ раза ( $K_1 > 1$ , $K_2 > 1$ , $K_1 < K_2$ )
	$\mu_1 < 0$ $\mu_2 < 0$ $\mu_1 > \mu_2$		Влияние функции 2 отрицательного фактора слабеет в $K_2$ раза, а влияние функции 1 положительного фактора уменьшается в меньшей степени в $K_1$ раз, приближая ее совместно с постоянной составляющей к значению $B$ ( $K_1 < 1$ , $K_2 < 1$ , $K_1 > K_2$ )

Чередование монотонностей в изменении зависимой величины и образование ее экстремума отображается в конкретной модели сочетанием знаков ее коэффициентов и показателей степени. Постоянная составляющая  $B$  в формулировках интерпретации таких моделей относится к определенной факторной функции в зависимости от теоретических или экспериментальных представлений об их связях в конкретном геомеханическом исследовании. Возможные варианты смысловой интерпретации моделей с двумя степенными функциями, образующими экстремум, приведены в табл. 3.

*Интерпретация моделей, содержащих экспоненциальные функции*

Экспоненциальные модели, описывающие изменение зависимой величины  $y$ , также содержат постоянную составляющую  $B$  и одну или две экспоненциальные функции вида  $Ae^{x/\lambda}$ , где  $\lambda$  – интервал релаксации,  $x$  – аргумент ( $-\infty < x < \infty$ ). Выделим два значения одной функции, взятых при текущем аргументе  $x$  и увеличенном на интервал  $\lambda$  ( $x+\lambda$ ). Представим отношение значений в виде дроби

$$\frac{Ae^{\frac{x+\lambda}{\lambda}}}{Ae^{\frac{x}{\lambda}}} = e$$

Данное соотношение имеет следующее толкование. При приросте аргумента  $x$  на интервал релаксации  $\lambda > 0$  значение экспоненциальной функции увеличивается в  $e$  раз, где  $e$  – основание натурального логарифма. Если в показателе степени будет содержаться интервал релаксации с отрицательным знаком ( $\lambda < 0$ ), то при росте аргумента на интервал  $|\lambda|$  отношение функций уменьшается в  $e$  раз. Чем меньше интервал релаксации (по его модулю), тем более круто изменяется экспоненциальная функция. Отметим, что коэффициент  $A$  в модели представляется частным значением факторной функции, когда аргумент равен нулю ( $x=0$ ).

Изменения зависимой величины в некоторых процессах описываются показательной функцией в сочетании с ее постоянной составляющей или асимптотой, наклоненной с угловым коэффициентом  $B_x$ . Варианты построения и смысловой интерпретации таких моделей приведены в табл. 4.

Таблица 4

**Интерпретация моделей с экспоненциальной функцией, содержащих постоянную составляющую  $y = Ae^{x/\lambda} + B$  или наклонную асимптоту  $y = Ae^{x/\lambda} + B_x x + B$**

Знак коэф. $A$	Знак интервала $\lambda$	Типичные графики		Интерпретация характерных изменений экспоненциальной функции
$A > 0$	$\lambda > 0$			Увеличивается от постоянной составляющей $B$ или асимптоты с положительным угловым коэффициентом $B_x$ так выпукло, что при росте аргумента на интервал $\lambda$ превышает над ними в $e$ раз
	$\lambda < 0$			Уменьшается так выпукло, что при росте аргумента на интервал $ \lambda $ приближается сверху к постоянной составляющей $B$ или асимптоте с отрицательным угловым коэффициентом $B_x$ в $e$ раз
$A < 0$	$\lambda > 0$			Уменьшается так вогнуто, что при росте аргумента на интервал $\lambda$ удаляется от постоянной составляющей $B$ или асимптоты с отрицательным угловым коэффициентом $B_x$ в $e$ раз
	$\lambda < 0$			Увеличивается так вогнуто, что при росте аргумента на интервал $ \lambda $ приближается снизу к постоянной составляющей $B$ или асимптоте с положительным угловым коэффициентом $B_x$ в $e$ раз

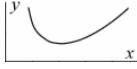
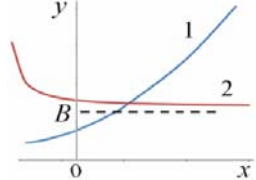
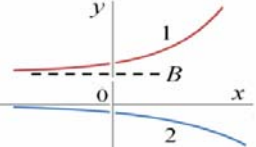
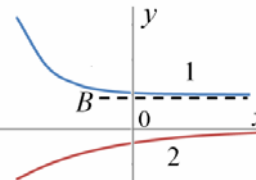

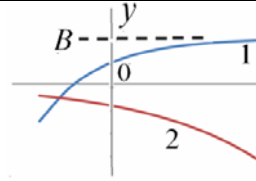
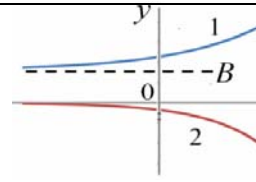
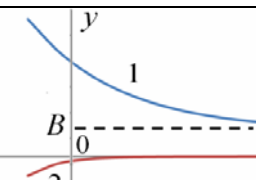


Модели, описывающие изменение зависимой величины по двум противоположным монотонностям, содержат экстремум. Его положение определяется также по результатам дифференцирования математического выражения модели. Значение аргумента  $x_3$ , при котором образуется экстремум, рассчитывается по следующей формуле:

$$x_3 = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} \ln \left( - \frac{\lambda_1 A_2}{\lambda_2 A_1} \right).$$

Таблица 5

**Интерпретация моделей с двумя экспоненциальными функциями, образующими экстремум  $y = A_1 e^{\lambda_1 x} + A_2 e^{\lambda_2 x} + B$**

Знак коэф. $A$	Знаки интервалов $\lambda$	Графики факторных функций	Варианты интерпретации характерных изменений факторных экспоненциальных функций
Функция $y$ выпуклая с минимумом 			
$A_1 > 0$ $A_2 > 0$	$\lambda_1 > 0$ $\lambda_2 < 0$ $\lambda_1 >  \lambda_2 $		Влияние факторной функции 2 уменьшается с интервалом релаксации $ \lambda_2 $ , приближая ее совместно с постоянной составляющей к ее значению $B$ , а влияние факторной функции 1 увеличивается с меньшей крутизной и большим интервалом релаксации $\lambda_1$
$A_1 > 0$ $A_2 < 0$	$\lambda_1 > 0$ $\lambda_2 > 0$ $\lambda_1 < \lambda_2$		Влияние функции 2 отрицательного фактора возрастает с интервалом релаксации $\lambda_2$ , а противоположное влияние функции 1 положительного фактора увеличивается с большей крутизной и меньшим интервалом релаксации $\lambda_1$
	$\lambda_1 < 0$ $\lambda_2 < 0$ $ \lambda_1  <  \lambda_2 $		Влияние функции 1 положительного фактора уменьшается с интервалом релаксации $ \lambda_1 $ , приближая ее совместно с постоянной составляющей к значению $B$ , а противоположное влияние функции отрицательного фактора слабеет с меньшей крутизной и большим интервалом релаксации $ \lambda_2 $
Функция $y$ вогнутая с максимумом 			
$A_1 < 0$ $A_2 < 0$	$\lambda_1 < 0$ $\lambda_2 > 0$		Влияние функции 1 отрицательного фактора слабеет с интервалом релаксации $ \lambda_1 $ , приближая ее совместно с постоянной составляющей к ее значению $B$ , а функция 2 отрицательного фактора увеличивается с меньшей крутизной и большим интервалом релаксации $\lambda_2$
$A_1 > 0$ $A_2 < 0$	$\lambda_1 > 0$ $\lambda_2 > 0$ $\lambda_1 > \lambda_2$		Влияние функции 1 положительного фактора увеличивается от постоянной составляющей $B$ с интервалом релаксации $\lambda_1$ , а противоположное влияние функции 2 отрицательного фактора возрастает с большей крутизной и меньшим интервалом релаксации $\lambda_2$
	$\lambda_1 < 0$ $\lambda_2 < 0$ $ \lambda_1  >  \lambda_2 $		Влияние функции 2 отрицательного фактора слабеет с интервалом релаксации $ \lambda_2 $ , а противоположное влияние функции 1 положительного фактора уменьшается с меньшей крутизной и большим интервалом релаксации $ \lambda_1 $ , приближая ее совместно с постоянной составляющей к значению $B$

Свойства интерпретации модели с двумя экспоненциальными факторными функциями, образующими экстремум, приведены в табл. 5. Здесь дано описание вариантов характерных изменений функций, объясняющих с учетом знаков модельных коэффициентов и параметров монотонности роста и спада зависимой физической величины и образование ее максимума или минимума. В формулировках вариантов постоянная составляющая  $B$  может по сопряжению относиться к факторной функции 1 или 2 в зависимости от условий исследуемого геомеханического процесса.

#### Примеры построения и интерпретации моделей

*Пример 1.* В статье [11] приведено дискретное распределение вертикального напряжения  $\sigma_v$  в бетонной крепи воздухоподающего ствола рудника «Таймырский» (см. рис. 3), определенного на разной глубине  $h$  методом щелевой разгрузки. На графике значения зафиксированных напряжений дополнены интервалами экспериментальной среднеквадратичной погрешности. С ростом глубины напряжение нелинейно увеличивается.

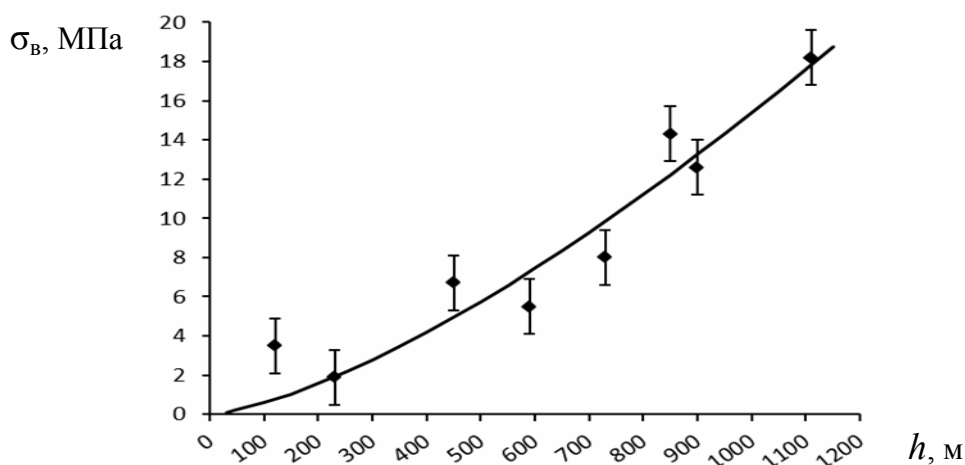


Рис. 3. Распределение экспериментального напряжения и график функционально-факторной модели

Зависимость напряжения крепи ствола от глубины его отметки представлена моделью полиномиальной регрессии. Несмотря на высокий коэффициент ее детерминации, она выражает лишь формальную аппроксимацию данных эксперимента и не содержит никакой смысловой информации о характере их связи.

Недостаток отмеченной интерпретации данных эксперимента восполняется построением функционально-факторной модели. Учтено, что напряжение в бетонной крепи ствола увеличивается при его углублении из-за фактора уплотнения и соответствующей деструкции материала ствола и окружающих горных пород. Влияние данного фактора выражается степенной функцией. В результате построена следующая модель:

$$\sigma_v = 0,00086h^{1,42}.$$

Ее график показан на рис. 3. По модели определено, что при относительном росте глубины в  $K_a$  раз, например  $K_a=1,5$ , логарифм относительного изменения напряжения в бетонной крепи ствола увеличивается в  $1,42 \cdot \ln K_a$  раза (по примеру получаем  $K=1,78$ ).

Теперь смысловая интерпретация полученной математической модели состоит в следующем. Напряжение вертикальной нагрузки  $\sigma_v$  бетонной крепи воздухоподающего ствола рудника «Таймырский» по мере углубления его отметки

$h$  в интервале от 0 до 1200 м изменяется из-за уплотнения и деструкции материала ствола и окружающих горных пород с относительной погрешностью 9 % по степенной функции с показателем 1,42. Напряжение увеличивается так выпукло, что на глубине 1 м равно 0,00086 МПа, а при углублении отметки ствола в 1,5 раза оно увеличивается в большей степени в 1,78 раза.

*Пример 2.* В исследованиях [12] описан деформационный процесс в горных выработках угольных шахт, закрепленных анкерной крепью. С целью определения закономерностей деформирования образующейся системы "анкеры – приконтурный горный массив" проведены измерения и представлен соответствующий график вогнутой зависимости опускания кровли  $\Delta N_0$  подготовительной горной выработки, расположенной в зоне влияния очистных работ, от срока  $A$  их поддержания. Для наглядности опускания кровли исходные данные представлены на рис. 4 в левосторонней системе координат с указанием оценочной относительной погрешности эксперимента 10 %. Существенное опускание кровли по графику в начальный период наблюдений объясняется сокращением пустот, трещин и уплотнением налегающих горных пород. В последующий период скрепленная система "анкеры – приконтурный горный массив" стабилизируется, и кровля из-за ее упруго-пластичных свойств опускается значительно медленнее. Описание графика ограничено формальной аппроксимацией степенной функцией без пояснения ее параметров и отображающих свойств.

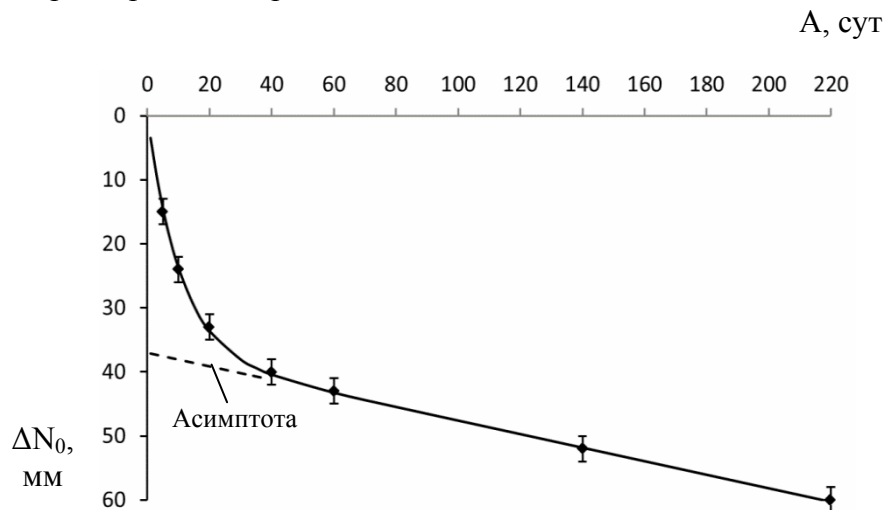


Рис. 4. График опускания кровли подготовительной горной выработки угольного месторождения в зоне влияния очистных работ

Для описания причинных закономерностей опускания кровли подготовительной выработки по исходным данным построена функционально-факторная модель. С учетом влияния факторов уплотнения горных пород в начале хронологических наблюдений и последующей их упруго-пластичной стабилизации модель сформирована в следующем виде:

$$\Delta N_0 = -37 e^{-\frac{A}{10,5}} + 0,1A + 37 .$$

График модели показан на рис. 4. По ее структуре и значениям параметров дадим следующее толкование искомой закономерности. Кровля подготовительной горной выработки угольного месторождения, расположенная и закрепленная анкерами в зоне влияния очистных работ, по мере увеличения срока их поддержания до 220 суток, опускается вогнуто с относительной погрешностью 10 % по экспоненциальной функции и наклонной асимптоте. На начальном этапе поддержания (35 – 40 суток) кровля

опускается из-за сокращения пустот, трещин и уплотнения налегающих горных пород экспоненциально с временным интервалом релаксации 10,5 суток на 37 мм, приближаясь к асимптоте. В последующий период поддержания горных работ из-за сформировавшейся жестко-упругой системы "анкеры – приконтурный горный массив" кровля опускается почти линейно с угловым коэффициентом 0,1 мм/сут.

*Пример 3.* Эффективность взрывного разрушения горных пород существенно возрастает по мере увеличения скорости детонации применяемого в горном деле эмульсионного взрывчатого вещества "Поремит-1а", зависящей от его плотности. Оптимальное ее значение определено в статье [13] по дискретному распределению экспериментально измеренных скоростей при разной плотности вещества. Данные эксперимента аппроксимированы моделью параболической регрессии, показывающей локализацию максимума скорости детонации. Однако из-за сугубо формального подхода к построению данная модель не описывает и не объясняет причинные обстоятельства ее изменения, приводящие к максимуму.

С целью раскрытия закономерностей процесса детонации по исходным данным построена функционально-факторная модель. Результаты многократно повторяющихся измерений скорости детонации оценены по погрешности, усреднены по методике [14] и представлены на рис. 5. В экспериментальном распределении скорости  $V$  наблюдаются две противоположные монотонности – ее рост и спад. Поэтому в модельном изменении скорости учтено влияние соответствующих факторов детонации – энерговыделение сближающихся эмульсионных компонент вещества и экранирование энерговыделения из-за их переуплотнения. Влияние факторов, зависящее от плотности взрывчатого вещества  $\rho$ , выражено степенными функциями. В итоге модель сформирована в виде

$$V = 103100 (\rho - 1,145)^{0,812} - 232300 (\rho - 1,145)^{1,31} .$$

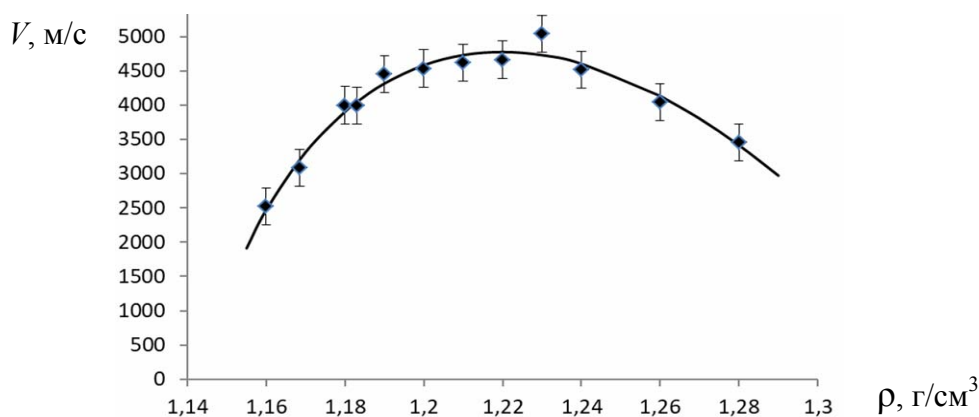


Рис. 5. Изменение скорости детонации взрывчатого вещества в эксперименте (точки) и по модели (график)

График модели показан на рис. 5. Дадим следующую смысловую интерпретацию ее аналитическому содержанию. Скорость детонации промышленного эмульсионного взрывчатого вещества "Поремит-1а", применяемого в горном деле для разрушения горных пород, по мере роста плотности вещества в интервале от 1,145 до 1,34 г/см<sup>3</sup> изменяется с относительной погрешностью 0,1 по сумме двух степенных функций с показателями 0,812 и 1,31 так вогнуто, что при плотности 1,22 г/см<sup>3</sup> достигает максимального значения 4875 м/с. Оно обусловлено тем, что при росте разности плотности взрывчатого вещества с его значением 1,145 г/см<sup>3</sup> в 1,05 раз влияние фактора энерговыделения вещества увеличивается по положительной степенной функции в 1,04 раза, а противоположное влияние экранирующего фактора, ограничивающего детонацию, увеличивается по отрицательной степенной функции, в большей степени в 1,07 раз.

*Пример 4.* В статье [15] приведены результаты экспериментальных исследований прочности прямоугольных образцов квазипластичной соляной породы – сильвинита, измеренной при разном боковом давлении. Зависимость увеличивающейся прочности  $\sigma_{\text{п}}$  от бокового давления  $\sigma_{\text{бок}}$  выражена усредняющим графиком, визуализация которого дает лишь приближенное вербальное представление о вогнутом характере ее связи с боковым давлением.

Учитывая погрешность экспериментальных измерений и возможную универсальность зависимости  $\sigma_{\text{п}}$  от  $\sigma_{\text{бок}}$ , данные прочности образцов сильвинита отнесены к значению  $\sigma_{\text{п}0}=21,6$  МПа, наблюдаемому при отсутствии бокового давления. Результаты измерений в относительных единицах представлены на рис. 6. По этим данным построена следующая функционально-факторная модель зависимости относительной прочности образцов сильвинита от бокового давления:

$$\frac{\sigma_{\text{п}}}{\sigma_{\text{п}0}} = 1 + 0,63 \sigma_{\text{бок}}^{0,62}.$$

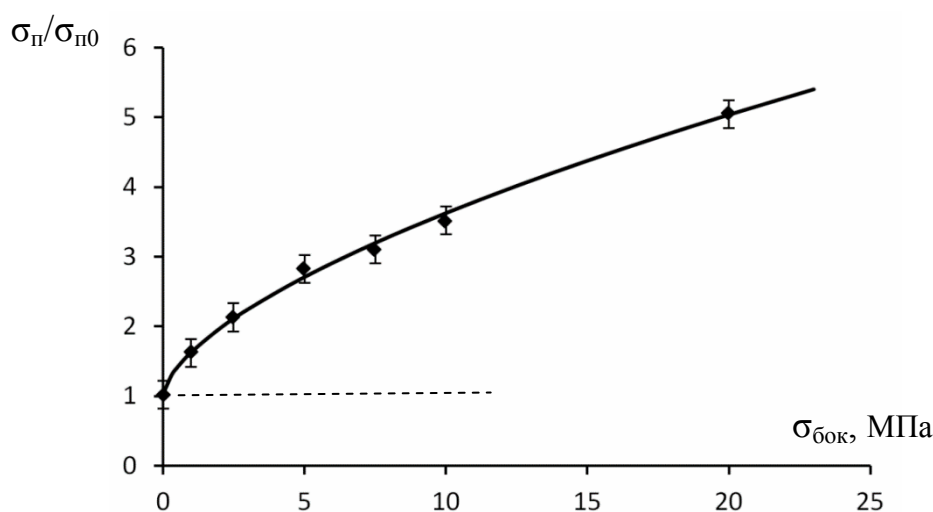


Рис. 6. Распределение относительной экспериментальной прочности образцов сильвинита и график моделируемой ее зависимости от бокового давления

График модели показан на рис. 6. Учитывая ее математическое выражение, дадим следующее смысловое толкование результатам эксперимента. Относительная прочность прямоугольных образцов соляной горной породы – сильвинита, выраженная в долях прочности 21,6 МПа, наблюдаемой при отсутствии бокового давления, по мере его роста, приводящего к объемному сжатию и развитию пластичности образцов, увеличивается от единицы с относительной погрешностью 7 % по степенной функции с показателем 0,62. При этом относительная прочность изменяется так вогнуто, что при боковом давлении 1 МПа составляет 1,63, а логарифм отношения ее приростов над единицей в 0,62 раза меньше логарифма отношений соответствующих значений бокового давления. Его увеличение в 1,5 раза приводит к превышению относительной прочности образцов сильвинита над единицей в меньшей степени в 1,29 раза.

*Пример 5.* Трудоемкость разрушения горной породы оценивается по 20-балльной шкале ее крепости, предложенной профессором М. М. Протодыяконовым. Непосредственное определение крепости весьма сложное, поскольку содержит процедуры дробления пробы горной породы на специальной установке, ее просеивание, многократное деление и взвешивание. Поэтому наиболее просто крепость  $f$  определяют косвенно по ее графическим или математическим связям с известной прочностью горных пород на сжатие  $\sigma_{\text{сж}}$ . Соответствующие графики, приведенные в работе [16] и

построенные по формуле Л. И. Барона [17]

$$f = \frac{\sigma_{сж}}{30} + \sqrt{\frac{\sigma_{сж}}{3}}, \text{ показаны на рис. 7.}$$

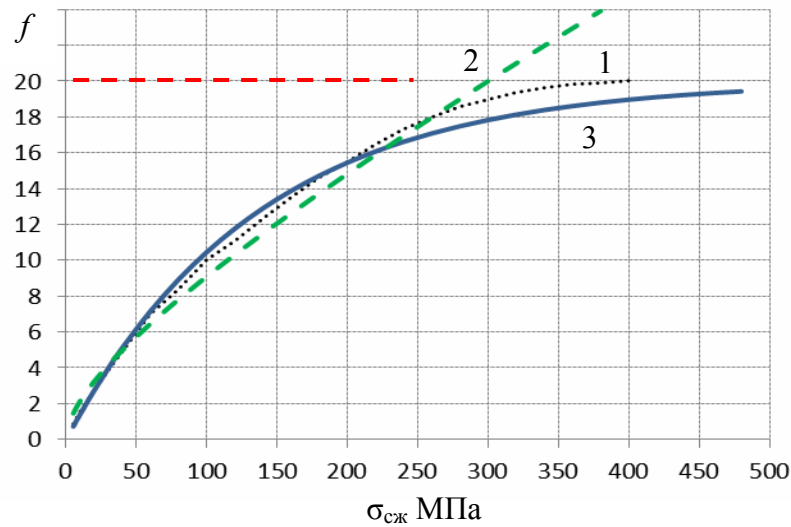


Рис. 7. Графики зависимости крепости горной породы от ее прочности, построенные по данным:  
1 – работы [16]; 2 – формулы Л.И. Барона;  
3 – функционально-факторной модели

Использование известных графиков ограничено прочностью горных пород, при которой крепость становится максимальной  $f=20$ . Так графическая зависимость (точки) ограничена прочностью горных пород 400 МПа, а зависимость Л. И. Барона (пунктир) – прочностью 300 МПа. Поэтому по данным графикам невозможно оценить по 20-балльной шкале крепость горных пород, обладающих значительно большей прочностью 400 – 600 МПа, например, кварцитов и базальтов.

Отмеченные ограничения в определении крепости горных пород снимаются в функционально-факторной модели путем введения экспоненциальной функции крепости, приближающейся асимптотически снизу к ее максимальному значению. Соответствующую зависимость  $f$  от  $\sigma_{сж}$ , с учетом наименьшего ее отклонения от известных графиков, представим математической формулой

$$f = 20 \left( 1 - e^{-\frac{\sigma_{сж}}{135}} \right).$$

График полученной зависимости показан на рис. 7 сплошной линией. Дадим следующую ее смысловую трактовку. Крепость горных пород  $f$ , оцениваемая по 20-балльной шкале профессора М. М. Протоdjяконова, увеличивается в связи с ростом их прочности на сжатие  $\sigma_{сж}$  по экспоненциальной функции, вогнуто приближаясь с интервалом релаксации 135 МПа к максимальной отметке крепости 20 баллов.

#### Заключение

По представленной методологии построения и смысловой интерпретации функционально-факторных моделей достигается главная цель экспериментального научного исследования геомеханических явлений – установить и объяснить закономерности их становления и развития. Поскольку геомеханическое явление выражается в изменении его зависимой физической величины, то установление и толкование причин и особенностей ее функциональной связи с аргументами с помощью влияющих факторов, модельных параметров и коэффициентов составляют суть обнаруженных новых знаний об исследуемом явлении.

Следует добавить, что смысловая интерпретация функционально-факторных моделей, сформулированная по аналогии с приведенными примерами, из-за раскрытия новых знаний о конкретном наблюдаемом геомеханическом явлении может составить защищаемое научное положение в диссертационном исследовании.

### Список литературы

1. Сашурин А.Д., 2019. Геомеханическое обеспечение недропользования: проблемы, задачи, решения. *Проблемы недропользования*, № 3 (22), С. 71 – 76. DOI: 10.25635/2313-1586.2019.03.071
2. Heim A., 1978. Mechanismus der Gebirgsbildung. *Bale*.
3. Зуев Б.Ю., Пальцев А.И., 2010. Научно-методические основы физического моделирования нелинейных геомеханических процессов при подземной разработке полезных ископаемых. *Горный информационно-аналитический бюллетень*, № 5, С.18 - 28.
4. Мазуров Б.Т., 2019. Математическое моделирование при исследовании геодинамики. *Новосибирск: Агентство «Сиб-принт»*, 360 с.
5. Сахно И.Г., 2012. Численное моделирование геомеханических процессов с учетом их нелинейности. *Проблемы горного давления*, № 1 – 2 (20 – 21), С. 57 – 67.
6. Данилов А.М., Гарькина И.А., 2014. *Интерполяция, аппроксимация, оптимизация: анализ и синтез сложных систем*. Пенза: ПГУАС, С. 22
7. Коновалов Ю.В., 2014. *Статистическое моделирование с использованием регрессионного анализа*. Москва: МГТУ им. Н. Э. Баумана, С. 5, 40
8. Антонов В.А., 2017. Метод нелинейной функционально-факторной регрессии в экспериментальных горно-технологических исследованиях. *Горный информационно-аналитический бюллетень*, № S23, С. 90 – 98.
9. Антонов В.А., 2018. Извлечение математико-статистических закономерностей в экспериментальных исследованиях горно-технологических процессов. *Проблемы недропользования*, № 4 (19), С. 61 – 70. DOI: 10.25635/2313-1586.2018.04.061
10. Антонов В.А., Яковлев М.В., 2012. О программе для ЭВМ "Тренды ФСП-1" и ее применении в информационных системах горных предприятий. *Информационные технологии в горном деле: доклады Всероссийской научной конференции с международным участием*, С. 26 – 34.
11. Ермолович Е.А., Яцыняк С.Д., Сеница И.В., 2022. Геомеханическое обследование воздухопадающего ствола рудника «Таймырский». *Известия ТулГУ. Науки о Земле*, Вып. 4, С. 424.
12. Демин В.Ф., Баймульдин М.М., Демина Т.В., 2014. Оценка параметров деформационных процессов в горных выработках, закрепленных анкерной крепью. *Известия вузов. Горный журнал*, № 1, С. 76.
13. Жариков С.Н., Реготунов А.С., Кутуев В.А., 2022. Современные научные исследования лаборатории разрушения горных пород ИГД УрО РАН и перспективы их развития. *Проблемы недропользования*, № 3, С. 81. DOI: 10.25635/2313-1586.2022.03.073
14. Антонов В.А., 2014. Достоверность регрессионных моделей в горно-технологических исследованиях. *Проблемы недропользования*, № 3 (3). С. 216 – 222.
15. Паньков И.Л., Асанов В.А., Ударцев А.А., Кузьминых В.С., 2016. Практика использования испытательного оборудования при изучении деформирования и разрушения квазипластичных горных пород в лабораторных условиях. *Вестник КРСУ*, том 16, № 1, С. 166.
16. Ржевский В.В., Новик Г.Я., 1978. *Основы физики горных пород*. Москва: Недра, С. 241.
17. Барон Л.И., Логунцов Б.М., Позин Е.З., 1962. *Определение свойств горных пород*. Москва: Госгортехиздат, С. 259.

## References

1. Sashurin A.D., 2019. Geomekhanicheskoe obespechenie nedropol'zovaniya: problemy, zadachi, resheniya [Geomechanical support of subsoil use: problems, tasks, solutions]. Problemy nedropol'zovaniya, № 3 (22), P. 71 – 76. DOI: 10.25635/2313-1586.2019.03.071
2. Heim A., 1978. Mechanismus der Gebirgsbildung . *Bale*.
3. Zuev B.Yu., Pal'tsev A.I., 2010. Nauchno-metodicheskie osnovy fizicheskogo modelirovaniya nelineinykh geomekhanicheskikh protsessov pri podzemnoi razrabotke poleznykh iskopaemykh [Scientific and methodological foundations of physical modeling of non-linear geomechanical processes in underground mining]. Gornyi informatsionno-analiticheskii byulleten', № 5, P. 18 – 28.
4. Mazurov B.T., 2019. Matematicheskoe modelirovanie pri issledovanii geodinamiki [Mathematical modeling in the study of geodynamics]. Novosibirsk: Agentstvo "Sib-print", 360 p.
5. Sakhno I.G., 2012. Chislennoe modelirovanie geomekhanicheskikh protsessov s uchetom ikh nelineinosti [Numerical modeling of geomechanical processes taking into account their nonlinearity]. Problemy gornogo davleniya, № 1 – 2 (20 – 21), P. 57 – 67.
6. Danilov A.M., Gar'kina I.A., 2014. Interpolyatsiya, approksimatsiya, optimizatsiya: analiz i sintez slozhnykh system [Interpolation, approximation, optimization: analysis and synthesis of complex systems]. Penza: PGUAS, P. 22
7. Konovalov Yu.V., 2014. Statisticheskoe modelirovanie s ispol'zovaniem regressionnogo analiza [Statistical modeling using regression analysis]. Moscow: MGTU im. N. E. Baumana, P. 5, 40
8. Antonov V.A., 2017. Metod nelineinoy funktsional'no-faktornoj regressii v eksperimental'nykh gorno-tekhnologicheskikh issledovaniyakh [Method of non-linear functional-factorial regression in experimental mining and technological research]. Gornyi informatsionno-analiticheskii byulleten', № S23, P. 90 – 98.
9. Antonov V.A., 2018. Izvlechenie matematiko-statisticheskikh zakonomernostei v eksperimental'nykh issledovaniyakh gorno-tekhnologicheskikh protsessov [Extraction of mathematical and statistical regularities in experimental studies of mining and technological processes]. Problemy nedropol'zovaniya, № 4 (19), P. 61 – 70. DOI: 10.25635/2313-1586.2018.04.061
10. Antonov V.A., Yakovlev M.V., 2012. O programme dlya EVM "Trendy FSP-1" i ee primenenii v informatsionnykh sistemakh gornyykh predpriyatii [About the computer program "FSP-1 Trends" and its application in information systems of mining enterprises]. Informatsionnye tekhnologii v gornom dele: doklady Vserossiiskoi nauchnoi konferentsii s mezhdunarodnym uchastiem, P. 26 – 34.
11. Ermolovich E.A., Yatsynyak S.D., Sinitsa I.V., 2022. Geomekhanicheskoe obsledovanie vozdukhopadayushchego stvola rudnika "Taimyrskii" [Geomechanical survey of the air-falling shaft of the Taimyrsky mine]. Izvestiya TulGU. Nauki o Zemle, Vyp. 4, P. 424.
12. Demin V.F., Baimul'din M.M., Demina T.V., 2014. Otsenka parametrov deformatsionnykh protsessov v gornyykh vyrabotkakh, zakreplennykh ankernoj krep'yu. Izvestiya vuzov [Estimation of the parameters of deformation processes in mine workings, fixed with bolts]. Gornyi zhurnal, № 1, P. 76.
13. Zharikov S.N., Regotunov A.S., Kutuev V.A., 2022. Sovremennye nauchnye issledovaniya laboratorii razrusheniya gornyykh porod IGD UrO RAN i perspektivy ikh razvitiya [Modern scientific research of the rock destruction laboratory of the Institute of Mining UB RAS]. Problemy nedropol'zovaniya, № 3, S. 81. DOI: 10.25635/2313-1586.2022.03.073
14. Antonov V.A., 2014. Dostovernost' regressionnykh modelei v gorno-tekhnologicheskikh issledovaniyakh [Reliability of regression models in mining and technological research]. Problemy nedropol'zovaniya, № 3 (3). P. 216 – 222.



15. Pan'kov I.L., Asanov V.A., Udartsev A.A., Kuz'minykh V.S., 2016. Praktika ispol'zovaniya ispytatel'nogo oborudovaniya pri izuchenii deformirovaniya i razrusheniya kvaziplastichnykh gornyx porod v laboratornykh usloviyakh [Practice of using test equipment in the study of deformation and destruction of quasi-plastic rocks in laboratory conditions]. Vestnik KRSU, V. 16, № 1, P. 166.

16. Rzhetskii V.V., Novik G.Ya., 1978. Osnovy fiziki gornyx porod [Fundamentals of rock physics]. Moscow: Nedra, P. 241.

17. Baron L.I., Loguntsov B.M., Pozin E.Z., 1962. Opredelenie svoistv gornyx porod [Determination of the properties of rocks]. Moscow: Gosgortekhnizdat, P. 259.