

УДК 622.83:622.28

Балек Александр Евгеньевич,
доктор технических наук,
ведущий научный сотрудник,
лаборатория геомеханики
подземных сооружений,
Институт горного дела УрО РАН,
620075, г. Екатеринбург,
ул. Мамина-Сибиряка, 58,
e-mail: balek@igduran.ru

Коптяков Дмитрий Александрович,
научный сотрудник,
лаборатория геомеханики
подземных сооружений,
Институт горного дела УрО РАН,
e-mail: koptyakov_d@mail.ru

Масальский Николай Александрович,
лаборант, лаборатория
геомеханики подземных сооружений,
Институт горного дела УрО РАН,
e-mail: nmasalskiy01@mail.ru

Прищепа Дмитрий Вячеславович,
старший научный сотрудник,
лаборатория геомеханики подземных
сооружений,
Институт горного дела УрО РАН,
e-mail: prishchepaDV@yandex.ru

Харисов Тимур Фаритович,
заведующий лабораторией
геомеханики подземных сооружений,
Институт горного дела УрО РАН,
e-mail: timur-ne@mail.ru

АНАЛИЗ МЕТОДОВ ОПРЕДЕЛЕНИЯ НАГРУЗОК НА КРЕПЬ В УСЛОВИЯХ ЗАПРЕДЕЛЬНОГО НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ МАССИВА*

Аннотация:

Статья посвящена анализу методов расчета крепи подземных горных выработок в условиях предельного напряженно-деформированного состояния массива. Рассматриваются ключевые факторы, влияющие на устойчивость выработок: геомеханические свойства пород, горное давление, зоны разрушения и дилатансионные процессы. Особое внимание уделено аналитическим моделям (Феннера, Лабасса, Либермана, Шашенко, Литвинского и др.), используемым для прогнозирования параметров крепи.

Показано, что традиционные методы, основанные на упрощенных статических моделях, не учитывают реальное напряженно-деформированное состояние массива, что приводит к завышению коэффициентов запаса и ограничивает их применение в сложных горно-геологических условиях. Подчеркивается важность учета дилатансии, временных и пространственных изменений прочности пород, а также взаимодействия крепи с массивом.

DOI: 10.25635/2313-1586.2025.03.059

Balek Alexander E.
Doctor of Technical Sciences,
Leading Researcher,
Laboratory of geomechanics
of underground structures,
Institute of Mining UB RAS,
58 Mamina-Sibiryaka Str.,
620075 Ekaterinburg,
e-mail: balek@igduran.ru

Koptyakov Dmitry A.
Researcher,
Laboratory of geomechanics
of underground structures,
Institute of Mining UB RAS,
e-mail: koptyakov_d@mail.ru

Masalsky Nikolay A.
Laboratory assistant, Laboratory
of geomechanics of underground structures,
Institute of Mining UB RAS,
e-mail: nmasalskiy01@mail.ru

Prishchepa Dmitry V.
Senior Researcher,
Laboratory of geomechanics
of underground structures,
Institute of Mining UB RAS,
e-mail: prishchepaDV@yandex.ru

Kharisov Timur F.
Head of the Laboratory
of geomechanics of underground structures,
Institute of Mining UB RAS,
e-mail: timur-ne@mail.ru

ANALYSIS OF METHODS FOR DETERMINING THE LOADS ON THE SUPPORT IN CONDITIONS OF EXTREME STRESS-STRAIN STATE OF THE ARRAY

Abstract:

The article analyzes methods for calculating support systems in underground mine workings under conditions of limit-state stress-strain behavior of rock mass. Key factors affecting excavation stability are examined, including geomechanical properties of rocks, rock pressure, failure zones, and dilatancy processes. Particular attention is given to analytical models (by Fenner, Labasse, Liberman, Shashenko, Litvinsky, etc.) used for support parameter prediction.

The study demonstrates that traditional methods based on simplified static models fail to account for actual stress-strain behavior, leading to overestimated safety factors and limited applicability in complex geomechanical conditions. The importance of considering dilatancy, temporal and spatial strength variations, and support-rock interaction is emphasized.

Despite theoretical rigor, modern methodologies exhibit significant limitations: challenges in determining parameters of fractured rock mass (residual strength, modulus degradation), contradictions in assessing

* Исследование выполнено в рамках Гос. задания: № 075-00410-25-00. № гос. рег. 123012300007-7, тема 3 (2025-2027) «Выявление закономерностей развития геодинамических процессов в условиях техногенного преобразования недр и разработка мер по повышению безопасности горного производства (FUWE-2025-0003)».

Отмечается, что современные методики, несмотря на теоретическую строгость, обладают существенными недостатками: сложностью определения параметров разрушенного массива (остаточная прочность, модуль спада), противоречиями в оценке влияния отпора крепи, ограниченной применимостью в инженерной практике. Наиболее перспективными признаны подходы, сочетающие аналитические решения с эмпирическими коэффициентами (например, метод Литвинского).

Выводы статьи подчеркивают необходимость дальнейших исследований, включающих численное моделирование, лабораторные и натурные эксперименты для разработки более точных и практико-ориентированных методик расчета крепи. Оптимизация баланса между детализацией модели и ее практической реализуемостью остается ключевой задачей в обеспечении устойчивости подземных выработок.

Ключевые слова: подземные горные выработки, крепь, запредельное напряженно-деформированное состояние, аналитические модели, дилатансия, горное давление, устойчивость.

support resistance effects, and restricted practical applicability. Hybrid approaches combining analytical solutions with empirical coefficients (e.g., Litvinsky's method) show particular promise.

The conclusions highlight the need for further research incorporating numerical modeling, laboratory, and field experiments to develop more accurate and practical support design methods. Optimizing the balance between model sophistication and practical implementation remains crucial for ensuring underground excavation stability.

Key words: underground mine workings, support system, limit-state stress-strain behavior, analytical models, dilatancy, rock pressure, stability.

Введение

Устойчивость подземных горных выработок на требуемый срок эксплуатации обеспечивается за счет применения различного рода крепления. Тип и параметры крепи породных обнажений и массива вмещающих пород зависят от ожидаемых негативных проявлений горного давления, которые, в свою очередь, зависят от геомеханических, горно-геологических и горнотехнических условий массива. Основными нормативными документами, регламентирующими методику выбора и расчета параметров несущих и упрочняющих видов крепи на горнорудных предприятиях Российской Федерации, служат СП 91.13330.2012 «Свод правил. Подземные горные выработки» и «Руководство по проектированию подземных горных выработок и расчету крепи». Аналогичные нормативы в различных вариациях в настоящее время используются также на предприятиях стран СНГ и на большинстве рудников дальнего зарубежья [1 – 2].

Существующие нормативные методы расчета крепи подземных выработок основаны на прогнозируемых нагрузках и статических моделях, учитывающих смещения и вес разрушенных пород. Фактическое НДС массива при этом игнорируется, а используются упрощенные эмпирические коэффициенты, зависящие от глубины и прочности пород.

Несмотря на простоту и доступность, традиционный подход к расчету крепи (основанный на минимальных данных) приводит к завышенным коэффициентам запаса и применим только для устойчивых пород вне влияния очистных работ. В сложных условиях требуются специализированные методики расчета.

С геомеханической точки зрения, в устойчивых выработках (I – III категории) массив находится в допредельном НДС, где концентрация напряжений недостаточна для разрушения контура. Возможные нарушения происходят под действием гравитационных напряжений, приводя к формированию свода естественного равновесия. В этих условиях эффективны простые типы крепи (анкеры, рамы, стойки), рассчитанные на вес породных вывалов и основанные на жесткопластических моделях.

В сильноотрешиноватых массивах (IV – V категории) происходит деформирование и разрушение пород на контуре выработки под действием сжимающих напряжений, с развитием сдвиговых и разрывных трещин, распространяющихся в массив. Формируются зоны запредельного НДС, отражающие стадии разрушения пород под нагрузкой.

При решении практических задач геомеханики чаще всего данные зоны выделяют по трем наиболее характерным границам (рис. 1):

1) граница между зоной допредельного деформирования (которая объединяет стадии уплотнения, линейно-упругого и нелинейно-упругого НДС) и зоной запредельного деформирования, отражающей постпиковое НДС стадий неупругого и запредельного поведения разрушаемого породного массива на ниспадающей ветви диаграммы «напряжения – деформации»;

2) граница между зоной запредельного деформирования и зоной остаточной прочности, отражающей стадию постепенного выполаживания ниспадающей ветви диаграммы;

3) граница между зоной остаточной прочности и зоной «руинного» разрушения, в пределах которой структурные блоки вмещающего породного массива полностью утрачивают связность и стремятся выпасть в выработку под собственным весом.

В таких условиях основным фактором воздействия на крепь становится не обрушение пород, а выдавливание породных блоков под действием сжимающих нагрузок. Смещения этих блоков могут повредить даже мощную крепь, такую как чугунные тубинги [3 – 4].

В связи со случайным характером выдавливания породных клиньев, точные прогнозы затруднены. Тем не менее на основе оценки размеров зон запредельного НДС можно приблизительно рассчитать наиболее вероятные значения смещений (конвергенции) контура выработки, учитывая фактор дилатансии.

Зная параметры конвергенции, можно проанализировать деформационно-силовое взаимодействие массива на крепь, что позволяет выбрать и рассчитать ее параметры.

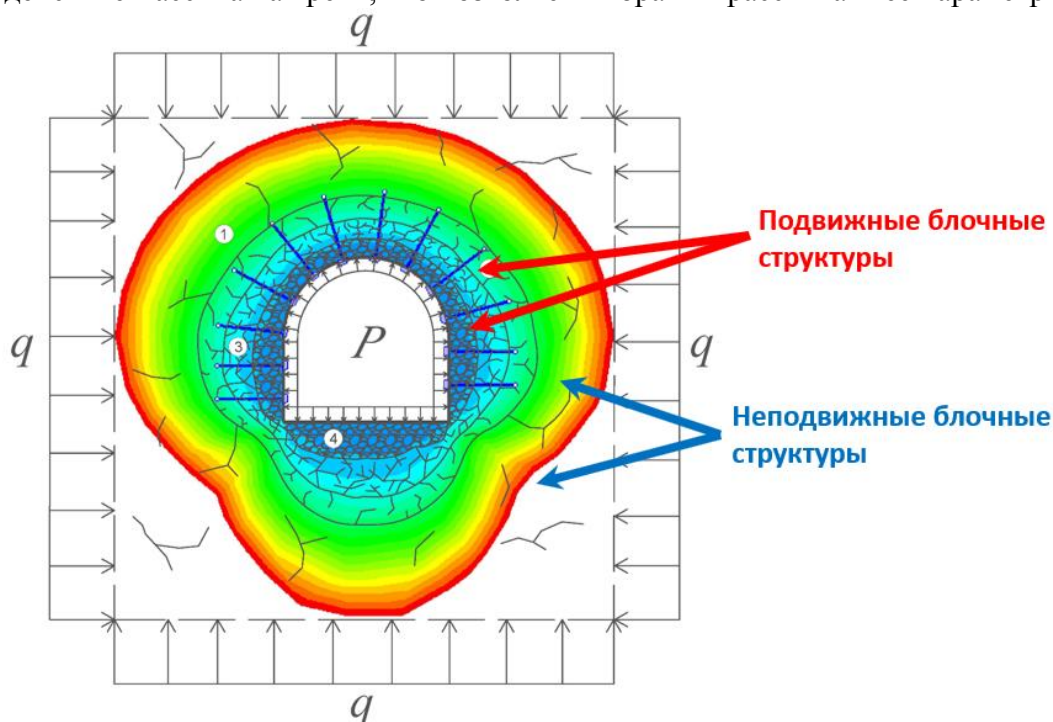


Рис. 1. Схема формирования нагрузок на крепь подземной выработки в условиях запредельного НДС:

q – внешние сжимающие нагрузки от массива окружающих пород (начальные напряжения);

P – реактивный отпор (грузонесущая способность) поддерживающей крепи;

1 – зона допредельного деформирования; 2 – зона запредельного деформирования;

3 – зона остаточной прочности; 4 – зона руинного разрушения

Таким образом, задача выбора/расчета крепи выработки, сооружаемой в скальных массивах IV – V категорий устойчивости, сводится к прогнозу параметров взаимодействия системы «крепь – массив», определяемых расчетными значениями смещений ее контура, которые, в свою очередь, напрямую зависят от прогноза размеров формируемой зоны запредельного НДС.

Основная сложность в решении задачи для скальных пород заключается в их пространственно-временной неоднородности НДС, обусловленной блочной структурой и непостоянством параметров. Это приводит к существенным различиям в механических процессах, даже в пределах одного типа массива.

О сложности механического поведения напряженных скальных массивов можно судить уже на масштабном уровне лабораторных испытаний образцов горных пород по диаграммам «напряжения – деформации». Для этого надо лишь рассматривать не идеализированные кривые, приводимые в учебниках, а реальные натурные данные.

С учетом всех вышеописанных сложностей для выделения наиболее общих принципов решения рассматриваемой проблемы прежде всего следует проанализировать аналитические решения рассматриваемой задачи, представленные в литературе [6 – 10].

Литературные источники свидетельствуют, что попытки разработать методы аналитического расчета смещений контура протяженной горной выработки предпринимались с середины XX века многими зарубежными и отечественными учеными, в частности Р. Феннером, А. Лабассом, Л. Уокером, Г. Шпакеллером, А. Галиным, Ю.М. Либерманом, Ю.З. Заславским, И.В. Баклашовым, Б.А. Картозия, А.Н. Шашенко, В.Н. Борисовым, Г.Г. Литвинским и др. В основу большинства расчетных схем положены следующие идеализированные предпосылки: протяженная горная выработка круглого поперечного сечения в массиве (упругая изотропная среда) с действующим гидростатическим полем напряжений q , определяемым собственным весом толщи налегающих пород и с установленной по всему контуру жесткой крепи, обладающей постоянным всесторонним отпором (несущей способностью) P .

Для условий 4 – 5 категории, когда массив окружающих пород переходит в запредельное НДС, формулы расчета значений радиальных смещений U контура выработки и радиуса зоны запредельного НДС r_{12} получаются решением аналогичных краевых осесимметричных задач. При этом практически все исследователи, поэтапно усложняя принимаемые математические модели запредельного деформирования разрушаемого породного массива, при рассмотрении самого механизма разрушения ограничиваются использованием упрощенной теории прочности Кулона-Мора с прямолинейной огибающей.

В основе большинства современных аналитических решений лежат формулы А. Галина, Р. Феннера и А. Лабасса, полученные на основе наиболее простых математических моделей.

Решение Р. Феннера, постулирующее, что весь вмещающий породный массив вокруг выработки имеет свойства идеально сыпучей среды с нулевой остаточной прочностью, представлено следующими формулами:

$$U = \frac{q - \sigma_{r12}}{2G} r_{12}^{A+1}; \quad (1)$$

$$r_{12} = \left(\frac{2q}{(A+1)P} \right)^{1/(A-1)}, \quad (2)$$

где r_{12} – радиус внешней границы зоны запредельного НДС, доли радиуса выработки;

σ_{r12} – радиальные напряжения на внешней границе зоны запредельного НДС, МПа;

$A = (1 + \sin \varphi) / (1 - \sin \varphi)$ – параметр объемной прочности вмещающего породного массива;

φ – угол внутреннего трения вмещающего породного массива, град.

В решении А. Лабасса принимается, что весь вмещающий породный массив представляет собой идеально связную среду со сцеплением C , значение которого добавляется в формулы (1) и (2) Феннера, в итоге получается:

$$r_{12} = \left[\frac{2(q+C)}{(A+1)(P+C)} \right]^{1/(A-1)}; \quad (3)$$

$$\sigma_{r12} = (P+C)r_{12}^{A-1} - C, \quad (4)$$

где C – сцепление вмещающего породного массива, МПа.

Ю.М. Либерманом [11] рассмотрена проходка выработки для условий идеально хрупкой сплошной среды, которая по достижении предела мгновенной прочности на

сжатие $\sigma_{сж}$ (совпадающего с пределом упругости) одномоментно во всей зоне запредельного НДС приобретает свойства идеально сыпучей среды с нулевой остаточной прочностью и углом внутреннего трения φ . В неразрушенном же состоянии (т.е. вне зоны запредельного НДС) породный массив характеризуется тем же значением угла внутреннего трения φ и пределом прочности на одноосное сжатие.

В различных изданиях решение Либермана по расчетам значений радиуса зоны запредельного НДС r_{12} и радиальных смещений U контура выработки записывается в разных формулировках. Наиболее компактно оно приведено в [11] в следующем виде:

$$U = \left[\frac{(q - 0,5\sigma_{сж})\sin\varphi + 0,5\sigma_{сж}}{2G} \right] r_{12}; \quad (5)$$

$$r_{12} = r_{23} = \left[\frac{(1 - \sin\varphi)(2q - \sigma_{сж})}{2P} \right]^{1/\sin\varphi}. \quad (6)$$

В учебном пособии Баклашова И.В., Борисова В.Н., Картозии Б.А., Шашенко А.Н. [12] представлено решение рассматриваемой задачи о проходке протяженной выработки круглого сечения в хрупко разрушающейся среде, но после разрушения массив во всей зоне запредельного НДС деформируется как жесткопластичная среда с постоянным уровнем остаточной прочности $\sigma_{ос}$:

$$U = \frac{2Bq + \sigma_{сж}}{4G(B+1)} r_{12}^2; \quad (7)$$

$$r_{12} = r_{23} = \left[\frac{2B \left(q - \frac{2Bq + \sigma_{сж}}{2(B+1)} \right) + \sigma_{ос}}{2BP + \sigma_{ос}} \right]^{1/2B}, \quad (8)$$

где r_{12} – радиус внешней границы зоны запредельного НДС, доли радиуса выработки;

r_{23} – радиус внешней границы зоны остаточной прочности, доли радиуса выработки;

U – радиальные смещения контура протяженной выработки, доли радиуса выработки;

q – всестороннее давление массива горных пород, вмещающих выработку, МПа;

P – отпор (грузонесущая способность) поддерживающей крепи выработки, МПа;

G – модуль сдвига массива вмещающих пород, МПа;

$\sigma_{сж}$, $\sigma_{ос}$ – предел прочности вмещающего породного массива на сжатие, соответственно, мгновенной и остаточной, МПа;

$B = \sin\varphi / (1 - \sin\varphi)$ – коэффициент угла внутреннего трения φ массива.

Также в [12 – 13] рассмотрена выемка в идеально хрупком напряженном породном массиве шарообразной круглой полости радиусом $r = 1$. Для данных условий с теми же обозначениями аналитическое решение о параметрах формирования запредельного НДС представлено следующими формулами:

$$U_{шар} = \frac{4Bq + 2\sigma_{сж}}{4G(4B+3)} r_{12шар}^3; \quad (9)$$

$$r_{12шар} = \left[\left(\frac{3q - 2\sigma_{сж}}{4B+3} + \frac{\sigma_{ос}}{2B} \right) \left(\frac{2B}{2BP + \sigma_{ос}} \right) \right]^{1/4B}, \quad (10)$$

где $r_{12шар}$ – радиус внешней границы зоны запредельного НДС вокруг шарообразной круглой выработки, доли радиуса выработки;

$U_{шар}$ – радиальные смещения контура шарообразной круглой выработки, доли радиуса выработки.

При замене значений остаточной прочности на предел мгновенной прочности (т.е. при $\sigma_{ос} = \sigma_{сж}$) реализуются условия запредельного НДС также и для модели «неразрушаемой», идеально пластичной среды.

В обеих моделях как для идеально хрупкой, так и для идеально пластичной среды постулирование мгновенного перехода от сплошного упругого массива в зоне допредельного деформирования к сплошному жесткопластичному в зоне остаточной прочности позволяет избегать необходимости учета фактора дилатансии, который проявляется в переходной зоне запредельного деформирования при сдвиговых и разрывных разрушениях и, соответственно, разрыхлении сплошной упругой среды (см. рис.1).

Разумеется, данное условие следует понимать лишь в качестве методологического приема, поскольку в реальности подобный переход неизбежно будет сопровождаться такими динамическими процессами (горными ударами), которые окажут на крепь гораздо большее воздействие, чем постепенные деформации. Полностью же избавиться от необходимости учета дилатансии при этом не удастся, если вспомнить, что первые исследования этого явления проводились Рейнольдсом как раз на песке.

Между тем практика ведения проходческих работ в напряженных иерархически блочных скальных породных массивах свидетельствует о существенности влияния дилатансионных процессов на устойчивость крепи строящихся выработок. В этой связи в [12] также было рассмотрено формирование переходной зоны запредельного деформирования в границах между радиусами r_{12} и r_{23} (см. рис. 1) и, соответственно, влияние фактора дилатансии. Более того, предпринята попытка учесть в процессах формирования зоны запредельного НДС и влияние фактора времени путем использования в расчетных зависимостях реологических параметров (по результатам исследований М.К. Теплового, С.В. Родоманцева и В.Г. Хлопцова).

Итоговое аналитическое решение о параметрах формирования зоны запредельного НДС с учетом дилатансии и фактора времени представлено следующими формулами:

$$U = \frac{(1-\beta)(\sigma_{сж}-\sigma_{ос})}{2M_0} + [\varepsilon_{\theta 12} + \frac{(1+\beta)(\sigma_{сж}-\sigma_{ос})}{2M_0}]r_{23}^2 ; \quad (11)$$

$$r_{23} = \frac{r_{12}}{\rho} , \quad (12)$$

где $\sigma_{ос}$, $\sigma_{сж}$, $\sigma_{ос}$ – пределы прочности вмещающего породного массива на сжатие, соответственно: длительная, мгновенная, остаточная и постепенно снижающаяся во времени в зоне запредельного деформирования, МПа;

$M_{ос}$, M_0 – модуль спада вмещающего породного массива при одноосном сжатии в зоне запредельного деформирования, соответственно, длительный и мгновенный, МПа;

$E_{ос}$, E_0 – модуль линейной деформации вмещающего породного массива в зоне запредельного деформирования, соответственно, длительный и мгновенный, МПа;

t_0 – время релаксации напряжений (реологическая постоянная) в зоне запредельного деформирования, с;

t – рассматриваемый интервал времени, с;

$\varepsilon_{\theta 12}$ – окружная относительная деформация породного массива на внешней границе r_{12} зоны запредельного деформирования;

β – коэффициент учета дилатансии, под которым понимается коэффициент поперечной линейной деформации породного массива в зоне запредельного деформирования при одноосном сжатии.

Прогнозное значение радиуса r_{23} внешней границы зоны остаточной прочности для условий проходки протяженной горизонтальной выработки определяет максимальную величину внешней вертикальной нагрузки P_v на крепь в соответствии с зависимостью:

$$P_v = \gamma_o R_3 (r_{23} - 1), \quad (13)$$

где P_v – распределенная вертикальная нагрузка, действующая на единицу площади контактной поверхности поддерживающей крепи выработки, МПа;

γ_o – усредненный объемный вес стремящегося обрушиться в выработку разрыхленного породного массива в зонах остаточной прочности и руинного разрушения, МН/м³;

$R_3 = (S/\pi)^{0.5}$ – эквивалентный радиус выработки в черне, м;

S – площадь поперечного сечения выработки в черне, м².

Данная методика расчета предполагает обрушение всего разрушенного массива кровли по вертикальным плоскостям, то есть всю зону остаточной прочности (до границы r_{34}) рассматривает как зону руинного разрушения с жесткопластической моделью сыпучей среды.

Решением уравнений (11) и (13) определяется минимальный отпор P_{\min} крепи, необходимый для устойчивости выработки в предельном НДС при идеальном контакте. На основании этого подбирается крепь с соответствующей грузонесущей способностью, параметры которой рассчитываются известными методами строительной механики с учетом конструктивных особенностей рассматриваемого типа крепи.

Комплекс формул (11) – (13) является наиболее детализированным аналитическим решением задачи как в отечественных, так и зарубежных исследованиях [9 – 10]. Он позволяет отобразить линеаризованные отрезки кривой «напряжение – деформация». Однако очевидным недостатком такого подхода является сложность задания механических параметров реального массива вмещающих пород на «предельных» стадиях, тем более с учетом фактора времени. В особенности это касается значений модуля спада M_0 и коэффициента учета дилатансии β .

В [12] в качестве коэффициента учета дилатансии окружающего выработку массива предлагается принимать удвоенную (поскольку рассматриваются условия плоской деформации) величину поперечной линейной деформации, получаемую на стадии предельного деформирования при испытаниях на одноосное сжатие цилиндрических породных образцов на «жестких» прессах. По результатам тех же испытаний, судя по всему, предполагается задавать и значения модуля спада M_0 и остаточной прочности σ_{oc} .

Между тем уже отмечалось, что даже для породных образцов данные параметры являются трудноопределимыми вследствие как неоднозначной их зависимости от бокового сжатия σ_0 , так и большей (по сравнению с допредельной стадией) вариативности, а также постоянной изменяемости по мере нагружения образца, не говоря уж о существенности влияния на них бокового сжатия σ_0 (а ведь в реальности НДС не одноосное, а объемное) и чрезвычайной сложности переноса результатов лабораторных испытаний породных образцов на масштабы иерархически блочного вмещающего массива горной выработки.

Данный недостаток касается всех без исключения современных аналитических решений рассматриваемой задачи, в которых реализуются попытки учесть максимальное количество влияющих факторов с еще большей детализацией, в частности сложности и трехмерности форм рассматриваемой выработки, анизотропии исходного НДС и физико-механических свойств вмещающего породного массива, воздействия неравномерных и переменных внешних нагрузок, статистического разброса исходных данных и т.п. [14 – 20].

Практически все методики включают коэффициенты, определяемые на основе экспериментальных данных, или параметры аппроксимации, но без указания источника и способа их получения.

И даже на такой ключевой параметр, как влияние отпора крепи на вмещающий массив, существуют две диаметрально противоположные точки зрения. Согласно первой [21 – 23], отпор крепи на смещения пород вокруг выработок существенно не влияет, а согласно второй [24 – 26], он оказывает существенное влияние. В работе [27], где приводятся экспериментальные исследования по выявлению влияния отпора крепи на смещение контура выработки, обосновывается, что в зависимости от тех или иных горно-геологических и горнотехнических условий справедливы обе точки зрения.

В качестве типичного представителя такого рода методик можно рассматривать последнюю статью коллектива профессора А.Г. Протосени [28], в которой описывается геомеханическая модель прогноза перемещений вмещающих горных пород подготовительных выработок на больших глубинах в гидростатическом поле напряжений с учетом влияния их пластического разрыхления и снижения прочностных характеристик, деформационного разупрочнения и отпора крепи, радиального изменения сцепления, а также влияния слоистости и напластований в условиях предельного и предельного состояний массива.

Основной недостаток методики [28] заключается в неполноте определения параметров, некоторые из них не имеют явной интерпретации, а другие выражаются через вспомогательные величины, способ определения которых не регламентирован. Ключевая проблема заключается в определении этих параметров для породного массива в масштабах выработки, а не для лабораторных образцов.

Сложности с использованием аналитических методик признаются даже авторами [13], включая профессора Б.А. Картозия [29 – 30], который отмечает малую пригодность этих решений для количественной оценки процессов в массиве горных пород, несмотря на их теоретическую изящность. Попытки введения «переходных коэффициентов» для нивелирования недостатков моделей рассматриваются как выдача желаемого за действительное.

Поэтому не удивительно, что в последние годы в данном направлении большое количество исследовательских работ посвящено не столько детализации и уточнению, сколько упрощению и адаптации существующих расчетных схем и решений (причем не только аналитических, но и численных) к возможности их применения в горнорудной практике.

Примером упрощения является статья А.Н. Шашенко [31], предлагающая аналитические зависимости для определения относительных значений радиальных смещений U контура и радиуса зоны запредельного НДС ($r_{12} = r_{23}$) для выработки круглого сечения. Метод основан на модели мгновенно и хрупко разрушающейся сплошной среды:

$$U = \varepsilon_v(0,5 - \sqrt{\frac{q}{2\sigma_{сж}k_{со}}}), \quad (14)$$

где добавлены следующие коэффициенты:

ε_v – коэффициент учета дилатансии, под которым понимается предельное значение относительной объемной деформации породы при одноосном сжатии в условиях запредельного НДС;

$k_{со}$ – коэффициент структурного ослабления нетронутого породного массива в зоне допредельного деформирования.

В статье [33] радиус $r_{12} = r_{23}$ зоны запредельного НДС предлагается определять по упрощенному выражению:

$$r_{12} = \exp\left(\sqrt{\frac{q}{2\sigma_{сж}k_{со}}} - 0,5\right). \quad (15)$$

В данном решении, ссылаясь на результаты предшествующих исследований [33 – 34], предлагается пренебречь практически всеми факторами, ранее учитываемыми в методиках Лабасса и Либермана, ограничившись заданием коэффициента учета дилатансии вмещающих пород через предельное значение относительной объемной деформации их разрыхления, а также предела мгновенной прочности пород на сжатие $\sigma_{сж}$ и их всестороннего внешнего давления q на выработку.

В методике используется коэффициент дилатансии, несмотря на принятую модель мгновенного хрупкого разрушения. Ранее отмечалась как неопределенность его задания, так и существенность влияния. При отсутствии дилатансии ($\varepsilon_v = 0$), согласно формуле (14), радиальные смещения U оказываются пренебрежимо малыми, что противоречит логике.

В качестве хорошего компромисса между детальностью учета наиболее значимых факторов и доступностью методики для практического применения заслуживает внимания цикл работ профессора Г.Г. Литвинского [35 – 37], в которых аналитическое решение рассматриваемой задачи получено путем использования так называемого «порождающего решения», основанного на применении метода малого параметра. Имеется в виду решение краевых задач в виде степенных рядов по степеням некоторого малого параметра, входящего в условие задачи в качестве заданной физической величины. Первый член такого степенного ряда и является «порождающим решением».

В принятых обозначениях (с введением параметра коэффициента устойчивости K_{yc}) методика Г.Г. Литвинского в конечном итоге записывается следующими формулами:

$$U = \frac{\varepsilon_v}{2} \left(1 - \frac{P}{q} - \frac{K_{yc}}{K_{yc}+2} r_{12}^2 \right); \quad (16)$$

$$r_{12} = \left[\frac{2q - \sigma_t}{(A+1)P} \right]^{1/K_{yc}}; \quad (17)$$

$$\sigma_t = \sigma_\infty + (\sigma_{сж} - \sigma_\infty) \exp\left(-\frac{t}{t_0}\right). \quad (18)$$

Временной фактор в значении σ_t (постепенно снижающегося во времени предела прочности на сжатие массива в области запредельного НДС) предлагается определять по формуле (18), где реологическую постоянную t_0 рекомендовано задавать по данным лабораторных испытаний породных образцов, замеряя время разрушения t_1 породы при ее нагружении постоянным напряжением $\sigma_1 > \sigma_{сж}$, с использованием выражения:

$$t_0 = t_1 \ln \frac{\sigma_{сж} - \sigma_\infty}{\sigma_1 - \sigma_\infty}. \quad (19)$$

В предлагаемом решении прежде всего обращает внимание отсутствие необходимости задания деформационных показателей породного массива: модулей упругости / сдвига и коэффициента Пуассона, поскольку обосновывается, что смещения контура выработки за счет упругих деформаций границы зоны запредельного НДС (а также вследствие упругого восстановления разрушаемых и, соответственно, разрыхляемых пород внутри нее) оказываются пренебрежимо малыми. В рассматриваемых условиях основной вклад в смещения U контура выработки вносит эффект дилатансии, возникающий за счет разрыхления вмещающих пород в процессе их разрушения.

Для задания значений коэффициента ε_v , учитывающего разрыхление и дилатансию, рекомендовано использовать эмпирическую зависимость $\varepsilon_v = 0,3 \operatorname{tg} \varphi$, полученную на основании экспериментальных данных при проведении инструментальных наблюдений на шахтах Донбасса [38].

Следует подчеркнуть, что так же, как и в формуле (14), под коэффициентом учета дилатансии ε_v здесь понимается предельное значение относительной объемной деформации породного массива при одноосном сжатии в условиях запредельного НДС. В отличие от коэффициента β в методике [12], отражающего удвоенную поперечную линейную относительную деформацию породного массива при одноосном сжатии в зоне запредельного деформирования.

И так же, как и в методике [31], в условиях отсутствия дилатансии ($\varepsilon_v = 0$) радиальные смещения U контура по формуле (16) оказываются равными нулю, поскольку упругие деформации в решении не учитываются.

При полном отсутствии отпора крепи ($P = 0$) расчетные значения радиуса r_{12} в формуле (17) и, таким образом, значения смещений U контура по формуле (16), становятся бесконечно большими, что соответствует принципиальной неустойчивости незакрепленной выработки в рассматриваемых условиях запредельного НДС. В методике [12] это не отражено.

Другим важным отличием предлагаемого решения от [12] является учет не только временного, но и пространственного фактора: постепенного снижения прочности рассматриваемых породных объемов при приближении к контуру выработки. Имеется в виду вполне очевидное, но прежде не учитываемое снижение их мгновенной прочности от максимального значения $\sigma_{сж}$ на внешней границе r_{12} зоны запредельного НДС до нуля на границе r_{34} с зоной руинного разрушения и, соответственно, на незакрепленном контуре выработки (см. рис. 1).

Для этого были проанализированы параметры кривых, формирующихся при различных значениях бокового сжатия σ_0 на ниспадающих ветвях диаграмм «напряжения –

деформации», типичных для образцов большинства относительно крепких и хрупкоразрушающихся скальных пород. И поскольку прочность таких пород, как правило, прямо пропорциональна минимальной компоненте напряженного состояния (в рассматриваемой задаче – радиальному напряжению) автором был сделан вывод, что в первом, достаточно приемлемом приближении вполне допустимо принять эту зависимость линейной.

Данное допущение избавило от необходимости задания в формулах (16) – (18) значений модуля спада и остаточной прочности. Однако оно же не позволяет выделить границу r_{23} зоны разрушенных пород, способных обрушиться в выработку. Соответственно, невозможно определить и максимальную величину внешней вертикальной нагрузки P_v на крепь с последующим выходом на оптимальный отпор крепи.

Попытки решения этой задачи Г.Г. Литвинским представлены в цикле статей [39 - 41], в которых, на основании решения краевой задачи упругопластического равновесия сплошной среды вокруг горизонтальной протяженной выработки, была определена степень возмущения границы зоны запредельного НДС, вызванной массовыми силами, действующими на разрушенную породу. При этом, с учетом ранее применявшегося порождающего решения о развитии запредельной зоны, также использовался метод малого параметра.

Результаты проведенных аналитических исследований показали, что отпор податливой поддерживающей крепи P_{\min} , минимально необходимый для обеспечения устойчивости выработки, зависит от радиуса r_{12} зоны запредельного НДС лишь для слабых пород с углом внутреннего трения φ порядка 20° и ниже, в соответствии с формулой

$$P_{\min} = \gamma_o R_3 \ln\left(\frac{r_{12}}{R_3}\right), \quad (20)$$

где P_{\min} – минимально необходимый для обеспечения устойчивости выработки всесторонний и равномерно-распределенный отпор единицы площади контактной поверхности поддерживающей крепи выработки, МПа;

γ_o – усредненный объемный вес участка разрыхленного породного массива, стремящегося обрушиться в выработку, МН/м³;

$R_3 = (S/\pi)^{0.5}$ – эквивалентный радиус выработки в черне, м;

S – площадь поперечного сечения выработки в черне, м².

Для крепких же скальных пород с большими углами внутреннего трения φ минимальный отпор крепи зависит уже не от размеров запредельной зоны, а исключительно от коэффициента устойчивости K_{yc} , в соответствии с выражением:

$$P_{\min} = \frac{\gamma_o R_3}{K_{yc} - 1}. \quad (21)$$

При этом в статье [40] неравномерность отпора крепи на различных участках породного контура выработки предложено учесть наряду с прочими не осесимметричными факторами, влияющими на форму и размеры запредельной зоны, например:

– разнокомпонентности исходного поля напряжений массива горных пород (т. е. его негидростатическое НДС);

– анизотропии и неоднородности прочностных свойств вмещающего породного массива;

– массовых сил, действующих на массив внутри зоны запредельного НДС;

– отличия формы породного контура выработки от кругового очертания.

Для определения конфигурации зоны с учетом всех пяти вышеперечисленных факторов, с использованием «принципа суперпозиции, действительного при учете первых степеней разложения по малому параметру», приведена следующая формула:

$$z = \omega(\zeta) = r_* \left(\zeta + \sum_{j=1}^5 \varepsilon_j e^{i\theta_j} \sum_{k=0}^{\infty} \delta_k^{(j)} \zeta^{1-k} \right), \quad (22)$$

где r_* – внешний радиус зоны запредельного НДС;

ζ – аффикс единичной окружности;

i – мнимая единица;

ε_j – малый параметр, соответствующий j -му фактору;

θ_j – угол отклонения оси симметрии j -го фактора от вертикали;

δ_k^j – коэффициент искажения формы ЗЗД для j -го фактора.

В статье [40] не поясняется, что представляет собой параметр z . Рекомендации по заданию других параметров сводятся к использованию разложения в ряд Фурье и полярных диаграмм прочности. В итоге автор, несмотря на горную специальность, предлагает общий алгоритм решения, оставляя практическую реализацию инженерам, хотя этот подход менее выражен, чем в других аналитических методиках.

Вероятно, из-за сложности практического применения Г.Г. Литвинский не использовал свою теорию прочности [42 – 43], ограничившись упрощенной теорией Кулона-Мора, как и другие исследователи.

Как и Б.А. Картозия [29 – 30], Г.Г. Литвинский в [40] заключает, что достоверные методы расчета крепи, учитывающие реальное взаимодействие с массивом, отсутствуют из-за сложности определения горного давления и вероятностного характера исходных данных.

В работе [44] предложена эффективная методика и результаты определения коэффициента разрыхления пород K_p вблизи выработок на основе инструментальных наблюдений за смещениями в приконтурной части массива. Анализ экспериментальных данных показывает, что коэффициент разрыхления вблизи выработки является переменным, убывает вглубь массива, достигая наибольшего значения у контура. Вокруг выработок существует зона шириной 1,5 – 2 м, породы в которой максимально разрыхлены. Средний коэффициент разрыхления пород в этой зоне составляет 1,06 – 1,0.

Г.Г. Литвинский в [36] указывал, что при интенсивном горном давлении и больших смещениях пород прогноз часто не удается, так как расчетные смещения превышают радиус выработки. Это обусловлено использованием линейной меры Коши, неадекватной при больших деформациях. В условиях геометрической нелинейности следует использовать «истинные» деформации (мера Генки). Анализ показал, что ошибка прогноза с мерой Коши не превышает 10 – 15 % лишь до уровня деформаций 50 – 60 %.

На основании выполненного анализа можно сделать вывод, что учет реального взаимодействия крепи с массивом горных пород определяется необходимостью комплексного анализа множества факторов, оказывающих влияние на геомеханическую устойчивость горных выработок. Это, в свою очередь, существенно усложняет расчетные методики и ограничивает их применимость в инженерной практике.

Для решения данной проблемы представляется целесообразным достижение оптимального баланса между степенью детализации учета наиболее значимых факторов и уровнем сложности предлагаемой методики, обеспечивающей ее доступность и практическую реализуемость.

Список литературы

1. Каюмова А.Н., Харисов Т.Ф., Рыбак С.А., 2018. О современном состоянии нормативной документации по креплению горных выработок. *Проблемы недропользования*, № 4 (19), С. 107–113.
2. Каюмова А.Н., Харисов Т.Ф., Рыбак С.А., 2018. О проблемах обеспечения безопасности в процессе проходки и крепления выработок. *Известия высших учебных заведений. Горный журнал*, № 7, С. 115–122.
3. Харисов Т.Ф., Антонов В.А., 2014. Обеспечение устойчивости крепи в процессе строительства вертикальных стволов. *Проблемы недропользования*, № 1 (1), С. 65–69.
4. Харисов Т.Ф., 2017. Исследования конвергенции породных стенок ствола в условиях запредельного состояния призабойного массива. *Известия высших учебных заведений. Горный журнал*, № 5, С. 46–51.
5. Geomaterials and recent developments in micro-mechanical numerical models. *ISRM News Journal*, 1997, Vol. 4, Number 2, P. 11–14.

6. *Вопросы теории горного давления*: сб. переводов. Под ред. П.И. Городецкого, А. А. Борисова. Москва: Госгортехиздат, 1961, 300 с.
7. Заславский Ю.З., 1963. *Проявления горного давления в глубоких шахтах Донбасса*. Москва: Недра, 238 с.
8. Либерман Ю.М., 1969. *Давление на крепь капитальных выработок*. Москва: Наука, 119 с.
9. Jovanović Petar, 1994. *Projektovanje i proračun podgrade horizontalnih podzemnih prostorija*. Т. 2 Belgrad: Rudarsko-geološki fakultet Univerziteta, 316 str.
10. Tajduś Antoni, Gała Marek, Tajduś Krzysztof, 2012. *Geomechanika w budownictwie podziemnym. Projectowanie i budowa tuneli*. Krakow: Akademia AGH, 762 p.
11. Беляков Н.А., Карасев М.А., Трушко В.Л., 2019. *Механика сплошной среды: учебное пособие*. Санкт-Петербург: Санкт-Петербургский горный университет, 114 с.
12. Баклашов И.В., Борисов В.Н., Картозия Б.А., Шашенко А.Н., 2004. *Геомеханика: учебник для вузов*. Т. 1. Москва: Изд-во МГГУ, 249 с. ISBN 5-7418-0326-1.
13. Балек А.Е., Харисов Т.Ф., Коптяков Д.А., 2024. Обоснование хрупкого режима разрушения низкопрочных сильнотрещиноватых массивов скальных горных пород. *Известия Тульского государственного университета. Науки о Земле*, № 4, С. 795-811.
14. Чанышев А.И., Абдулин И.М., 2014. Определение напряженно-деформированного состояния массива пород вокруг выработки произвольного сечения по данным измерений смещений на ее поверхности. *ФТПРПИ*, № 1, С. 23–29.
15. Чанышев А.И., Абдулин И.М., 2023. Определение смещений контура горных выработок после их образования. *Горный информационно-аналитический бюллетень*, № 10, С. 20–30.
16. Беляков Н.А., Емельянов И.А., 2022. Развитие подхода к обработке результатов измерений напряженного состояния методом кольцевой разгрузки. *Известия Тульского государственного университета. Науки о Земле*, № 2, С. 192–208.
17. Хлопцов В.Г., 2022. *Запредельное деформирование и разрушение породных массивов*. Ижевск: ИКИ, 140 с. ISBN 978-5-4344-0967-4.
18. Ботвенко Д.В., Казанцев В.Г., Ли Хи Ун, 2019. Управление состоянием массива у круговых выработок с учетом нелинейно-упругого поведения горных пород. *Уголь*, № 2, С. 31–36.
19. Мирсалимов В.М., Гасанов Ф.Ф., 2022. Решение упругопластической задачи для трещиноватого массива, ослабленного круговым отверстием. *Известия Тульского государственного университета. Науки о Земле*, № 1, С. 332–345. DOI: 10.46689/2218-5194-2022-1-1-332-345.
20. Качурин Н.М., Захаров Е.И., Соловьев Д.А., Соловьев Р.А., 2022. Напряженно-деформированное состояние горного массива и крепи при строительстве подземных сооружений. *Известия Тульского государственного университета. Науки о Земле*, № 1, С. 355–362. DOI: 10.46689/2218-5194-2022-1-1-355-362.
21. Карасев М.А., Тиен Тай Нгуен, 2022. Метод прогноза напряженного состояния обделки подземных сооружений квазипрямоугольной и арочной форм. *Записки Горного института*, Т. 257, С. 807–821. DOI:10.31897/PMI. 2022.17.
22. Зуев Б.Ю., 2021. Методология моделирования нелинейных геомеханических процессов в блочных и слоистых горных массивах на моделях из эквивалентных материалов. *Записки Горного института*, Т. 250, С. 542–553. DOI: 10.31897/PMI.2021.4.6.
23. Алиев С.Б., Демин В.Ф., Кайназаров А.С., 2023. Оценка состояния приконтурного горного массива на сопряжении лавы с примыкающей выемочной выработкой. *Уголь*, № 1, С. 35–39. DOI: 10.18796 /0041-5790-2023-1-35-39.

24. Вербило П.Э., Иовлев Г.А., Петров Н.Е., Павленко Г.Д., 2022. Применение технологий информационного моделирования для маркшейдерского обеспечения ведения горных работ. *Горный информационно-аналитический бюллетень*, № 6-2, С. 60–79. DOI: 10.25018/02361493202262060.
25. Ignatiev S.A., Sudarikov A.E., Imashev A.Zh., 2021. Determination of the stress-strain state of rock mass and zone of inelastic deformation around underground mine excavation using modern methods of numerical modeling. *Journal of Sustainable Mining*, Vol. 20, no. 3, Article 7. DOI: 10.46873/2300-3960.1324.
26. Деев П.В., Цуканов А.А., 2022. Влияние границы раздела пород на напряженное состояние массива в окрестности горной выработки. *Известия Тульского государственного университета. Науки о Земле*, № 1, С. 448–457. DOI: 10.46689/2218-5194-2022-1-1-448-457.
27. Третенков И.В., Лукьянов В.Г., 2015. *Устойчивость горных выработок*. Томск: Издательский дом ТГУ, 132 с.
28. Протосеня А.Г., Третенков И.В., Тулин П.К., Шубин А.А., 2024. Метод прогноза перемещений пород вокруг подготовительных выработок на больших глубинах при разработке угольных месторождений. *Горный информационно-аналитический бюллетень*, № 8, С. 63–78. DOI: 10.25018/0236_1493_2024_8_0_63.
29. Картозия Б.А., 2023. Об одной юбилейной дате и ситуации в аналитической геомеханике. *Горный информационно-аналитический бюллетень*, № 10, С. 14–18.
30. Картозия Б.А., 2013. Традиционная инженерная задача геомеханики. *Горный информационно-аналитический бюллетень*, № 1, С. 236–245.
31. Шашенко А.Н., Гапеев С.Н., 2011. Упруго-пластическая задача плоского деформирования среды с разупрочнением вокруг отверстия круглой формы. *Горный информационно-аналитический бюллетень*, № 3, С. 278–282.
32. Терещук Р.Н., 2013. Управление устойчивостью горных выработок с анкерной крепью. *Горный информационно-аналитический бюллетень*, № S1, С. 140–151.
33. Шашенко А.Н., Тулуб С.Б., Сдвижкова Е.А., 2001. *Некоторые задачи статической геомеханики*. Киев: Пульсари, 243 с.
34. Шашенко А.Н., Солодянкин А.В., Гапеев С.Н., 2005. Определение напряженно-деформированного состояния породного массива с учетом эффекта разупрочнения в зоне разрыхления. *Разработка рудных месторождений*, Вып. 88, С. 44–49.
35. Литвинский Г.Г., 2017. Запредельное поведение пород вокруг горной выработки (порождающее решение). *Сборник научных трудов ГОУ ВПО ЛНР «ДонГТУ»*, № 6 (49), С. 5–14.
36. Литвинский Г.Г., 2017. Статика разрушения и деформирования пород вокруг горной выработки. *Сборник научных трудов ГОУ ВПО ЛНР «ДонГТУ»*, Вып. 7 (50), С. 19–30.
37. Литвинский Г.Г., 2018. Кинетика разрушения и деформирования пород вокруг горной выработки. *Сборник научных трудов ГОУ ВПО ЛНР «ДонГТУ»*, № 10 (53), С. 5–16.
38. Черняк И.Л., 1993. *Повышение устойчивости подготовительных выработок*. Москва: Недра, 256 с.
39. Литвинский Г.Г., 2017. Обоснование минимального отпора крепи в горной выработке. *Сборник научных трудов ГОУ ВПО ЛНР «ДонГТУ»*, № 6 (49), С. 15–25.
40. Литвинский Г.Г., 2020. Размеры и конфигурация зоны запредельных деформаций вокруг выработки. *Сборник научных трудов ГОУ ВО ЛНР «ДонГТИ»*, № 20 (63), С. 5–17.
41. Литвинский Г.Г., 2023. Основные режимы работы и геомеханические параметры взаимодействия крепи с горным массивом. *Научные технологии и оборудование в промышленности и строительстве*, № 1 (75), С. 5–15.

42. Литвинский Г.Г., 2008. *Аналитическая теория прочности горных пород и массивов*. Донецк: Норд-Пресс, 207 с.
43. Литвинский Г.Г., 2019. Развитие единой теории прочности и закономерности разрушения. *Сборник научных трудов ГОУ ВПО ЛНР «ДонГТУ»*, № 13 (56), С. 5–18.
44. Шашенко А.Н., Солодянкин А.В., Смирнов А.В., 2015. *Пучение пород почвы в выработках угольных шахт*. Днепропетровск: ТОВ «Лізунов-Прес», 256 с.

References

1. Kayumova A.N., Kharisov T.F., Rybak S.A., 2018. O sovremenном sostoyanii normativnoi dokumentatsii po krepneniyu gornykh vyrabotok [On the current state of the regulatory documentation on the fastening of mine workings]. *Problemy nedropol'zovaniya*, № 4 (19), P. 107–113.
2. Kayumova A.N., Kharisov T.F., Rybak S.A., 2018. O problemakh obespecheniya bezopasnosti v protsesse prokhodki i krepneniya vyrabotok [On the problems of ensuring safety in the process of sinking and fixing workings]. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedenii. Gornyi zhurnal*, № 7, P. 115–122.
3. Kharisov T.F., Antonov V.A., 2014. Obespechenie ustoichivosti krep'i v protsesse stroitel'stva vertikal'nykh stvolov [Ensuring the stability of the support during the construction of vertical trunks.] [Ensuring the stability of the support during the construction of vertical trunks]. *Problemy nedropol'zovaniya*, № 1 (1), P. 65–69.
4. Kharisov T.F., 2017. Issledovaniya konvergentsii porodnykh stenok stvola v usloviyakh zapredel'nogo sostoyaniya prizaboinogo massiva [Studies of the convergence of the rock walls of the trunk in the conditions of the extreme state of the bottom-hole massif]. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedenii. Gornyi zhurnal*, № 5, P. 46–51.
5. Geomaterials and recent developments in micro-mechanical numerical models. *ISRM News Journal*, 1997, Vol. 4, Number 2, P. 11–14.
6. Voprosy teorii gornogo davleniya: sb. perevodov [Questions of the theory of rock pressure]. Pod red. P.I. Gorodetskogo, A. A. Borisova. Moscow: Gosgortekhnizdat, 1961, 300 p.
7. Zaslavskii Yu.Z., 1963. Proyavleniya gornogo davleniya v glubokikh shakhtakh [Manifestations of rock pressure in the deep mines of Donbass]. Don-bassa. Moscow: Nedra, 238 p.
8. Liberman Yu.M., 1969. Davlenie na krep' kapital'nykh vyrabotok [Pressure on the support of capital works]. Moscow: Nauka, 119 p.
9. Jovanović Petar, 1994. *Projektovanje i proračun podgrade horizontalnih podzemnih prostoriya*. T. 2 Belgrad: Rudarsko-geološki fakultet Univerziteta, 316 str.
10. Tajduś Antoni, Gała Marek, Tajduś Krzysztof, 2012. *Geomechanika w budownictwie podziemnym. Projectowanie i budowa tuneli*. Krakow: Akademia AGH, 762 p.
11. Belyakov N.A., Karasev M.A., Trushko V.L., 2019. Mekhanika sploshnoi sredy: uchebnoe posobie [Continuum mechanics: a textbook]. Sankt-Peterburg: Sankt-Peterburgskii gornyi universitet, 114 p.
12. Baklashov I.V., Borisov V.N., Kartoziya B.A., Shashenko A.N., 2004. Geomekhanika [Geomechanics]: uchebnyk dlya vuzov. Vol. 1. Moscow: Izd-vo MGGU, 249 p. ISBN 5-7418-0326-1.
13. Balek A.E., Kharisov T.F., Koptiyakov D.A., 2024. Obosnovanie khрупkogo rezhima razrusheniya nizkoprochnykh sil'notreshchinovatykh massivov skal'nykh gornykh porod [Substantiation of the fragile regime of destruction of low-strength highly fractured masses of rocks]. *Izvestiya Tul'skogo gosudarstvennogo universiteta. Nauki o Zemle*, № 4, P. 795–811.
14. Chanyshhev A.I., Abdulin I.M., 2014. Opredelenie napryazhenno-deformirovannogo sostoyaniya massiva porod vokrug vyrabotki proizvod'nogo secheniya po dannym izmerenii smeshchenii na ee poverkhnosti [Determination of the stress-strain state of the rock mass

around the workings of a free section based on measurements of displacements on its surface]. FTPRPI, № 1, P. 23–29.

15. Chanyshiev A.I., Abdulin I.M., 2023. Opredelenie smeshchenii kontura gornyx vyrabotok posle ikh obrazovaniya [Determination of displacements of the mine workings after their formation]. Gornyi informatsionno-analiticheskii byulleten', № 10, P. 20–30.

16. Belyakov N.A., Emel'yanov I.A., 2022. Razvitie podkhoda k obrabotke rezul'tatov izmerenii napryazhennogo sostoyaniya metodom kol'tsevoi razgruzki [Development of an approach to processing the results of stress state measurements by the ring unloading method]. Izvestiya Tul'skogo gosudarstvennogo universiteta. Nauki o Zemle, № 2, P. 192–208.

17. Khloptsov V.G., 2022. Zapredel'noe deformirovanie i razrushenie porodnykh massivov [Extreme deformation and destruction of rock formations]. Izhevsk: IKI, 140 p. ISBN 978-5-4344-0967-4.

18. Botvenko D.V., Kazantsev V.G., Li Khi Un, 2019. Upravlenie sostoyaniem massiva u krugovykh vyrabotok s uchetom nelineino-uprugogo povedeniya gornyx porod Control of the array state at circular workings, taking into account the nonlinear elastic behavior of rocks]. Ugol', № 2, P. 31–36.

19. Mirsalimov V.M., Gasanov F.F., 2022. Reshenie uprugoplasticheskoi zadachi dlya treshchinovato massiva, oslablennogo krugovym otverstiem [Solving an elastoplastic problem for a fractured massif weakened by a circular hole]. Izvestiya Tul'skogo gosudarstvennogo universiteta. Nauki o Zemle, № 1, P. 332–345. DOI: 10.46689/2218-5194-2022-1-1-332-345.

20. Kachurin N.M., Zakharov E.I., Solov'ev D.A., Solov'ev R.A., 2022. Napryazhenno-deformirovannoe sostoyanie gornogo massiva i krepri pri stroitel'stve podzemnykh sooruzhenii [Stress-strain state of the mountain range and supports during the construction of underground structures]. Izvestiya Tul'skogo gosudarstvennogo universiteta. Nauki o Zemle, № 1, P. 355–362. DOI: 10.46689/2218-5194-2022-1-1-355-362.

21. Karasev M.A., Tien Tai Nguen, 2022. Metod prognoza napryazhennogo sostoyaniya obdelki podzemnykh sooruzhenii kvazipryamougol'noi i arochnoi form [A method for predicting the stress state of lining underground structures of quasi-rectangular and arched shapes]. Zapiski Gornogo instituta, Vol. 257, P. 807–821. DOI:10.31897/PMI. 2022.17.

22. Zuev B.Yu., 2021. Metodologiya modelirovaniya nelineinykh geomekhanicheskikh protsessov v blochnykh i sloistykh gornykh massivakh na modelyakh iz ekvivalentnykh materialov [A methodology for modeling nonlinear geomechanical processes in blocky and layered mountain massifs using models made of equivalent materials]. Zapiski Gornogo instituta, Vol. 250, P. 542–553. DOI: 10.31897/PMI.2021.4.6.

23. Aliev S.B., Demin V.F., Kainazarov A.S., 2023. Otsenka sostoyaniya prikonturnogo gornogo massiva na sopryazhenii lavy s primykayushchei vyemochnoi vyrabotkoi [Assessment of the condition of the contiguous mountain range at the interface of the lava with the adjacent excavation]. Ugol', № 1, P. 35–39. DOI: 10.18796 /0041-5790-2023-1-35-39.

24. Verbilo P.E., Iovlev G.A., Petrov N.E., Pavlenko G.D., 2022. Primenenie tekhnologii informatsionnogo modelirovaniya dlya marksheiderskogo obespecheniya vedeniya gornyx rabot [Use of information modeling technologies for surveying support of mining operations]. Gornyi informatsionno-analiticheskii byulleten', № 6-2, P. 60–79. DOI: 10.25018/02361493202262060.

25. Ignatiev S.A., Sudarikov A.E., Imashev A.Zh., 2021. Determination of the stress-strain state of rock mass and zone of inelastic deformation around underground mine excavation using modern methods of numerical modeling. *Journal of Sustainable Mining*, Vol. 20, no. 3, Article 7. DOI: 10.46873/2300-3960.1324.

26. Deev P.V., Tsukanov A.A., 2022. Vliyanie granitsy razdela porod na napryazhennoe sostoyanie massiva v okrestnosti gornoj vyrabotki [The influence of the rock interface on the stress state of the massif in the vicinity of the mine workings]. Izvestiya Tul'skogo

gosudarstvennogo universiteta. Nauki o Zemle, № 1, P. 448–457. DOI: 10.46689/2218-5194-2022-1-1-448-457.

27. Tretenkov I.V., Luk'yanov V.G., 2015. Ustoichivost' gornyx vyrabotok [Sustainability of mining workings]. Tomsk: Izdatel'skii dom TGU, 132 p.

28. Protosenya A.G., Tretenkov I.V., Tulin P.K., Shubin A.A., 2024. Metod prognoza peremeshchenii porod vokrug podgotovitel'nykh vyrabotok na bol'shikh glubinakh pri razrabotke ugol'nykh mestorozhdenii [A method for predicting rock movements around preparatory workings at great depths during the development of coal deposits]. Gornyi informatsionno-analiticheskii byulleten', № 8, P. 63–78. DOI: 10.25018/0236_1493_2024_8_0_63.

29. Kartoziya B.A., 2023. Ob odnoi yubileinoi date i situatsii v analiticheskoi geomekhanike [About one anniversary date and the situation in analytical geomechanics]. Gornyi informatsionno-analiticheskii byulleten', № 10, P. 14–18.

30. Kartoziya B.A., 2013. Traditsionnaya inzhenernaya zadacha geomekhaniki [The traditional engineering task of geomechanics]. Gornyi informatsionno-analiticheskii byulleten', № 1, P. 236–245.

31. Shashenko A.N., Gapeev S.N., 2011. Uprugo-plasticheskaya zadacha ploskogo deformirovaniya sredy s razuprochneniem vokrug otverstiya krugloi formy [The elasto-plastic problem of plane deformation of a medium with softening around a round-shaped hole]. Gornyi informatsionno-analiticheskii byulleten', № 3, P. 278–282.

32. Tereshchuk R.N., 2013. Upravlenie ustoichivost'yu gornyx vyrabotok s ankernoi krep'yu [Stability management of mining operations with anchorage]. Gornyi informatsionno-analiticheskii byulleten', № S1, P. 140–151.

33. Shashenko A.N., Tulub S.B., Sdvizhkova E.A., 2001. Nekotorye zadachi statisticheskoi geomekhaniki [Some tasks of statistical geomechanics]. Kiev: Pul'sari, 243 p.

34. Shashenko A.N., Solodyankin A.V., Gapeev S.N., 2005. Opredelenie napryazhenno-deformirovannogo sostoyaniya porodnogo massiva s uchetom effekta razuprochneniya v zone razrykhleniya [Determination of the stress-strain state of a rock mass, taking into account the softening effect in the loosening zone]. Razrabotka rudnykh mestorozhdenii, Vyp. 88, P. 44–49.

35. Litvinskii G.G., 2017. Zapredel'noe povedenie porod vokrug gornoj vyrabotki (porozhdayushchee reshenie) [Extreme behavior of rocks around the mine (generative solution)]. Sbornik nauchnykh trudov GOU VPO LNR "DonGTU", № 6 (49), P. 5–14.

36. Litvinskii G.G., 2017. Statika razrusheniya i deformirovaniya porod vokrug gornoj vyrabotki [Static destruction and deformation of rocks around the mine workings]. Sbornik nauchnykh trudov GOU VPO LNR "DonGTU", Vyp. 7 (50), P. 19–30.

37. Litvinskii G.G., 2018. Kinetika razrusheniya i deformirovaniya porod vokrug gornoj vyrabotki [Kinetics of destruction and deformation of rocks around the mine workings]. Sbornik nauchnykh trudov GOU VPO LNR "DonGTU", № 10 (53), P. 5–16.

38. Chernyak I.L., 1993. Povyshenie ustoichivosti podgotovitel'nykh vyrabotok [Improving the sustainability of preparatory workings]. Moscow: Nedra, 256 p.

39. Litvinskii G.G., 2017. Obosnovanie minimal'nogo otpora krep'i v gornoj vyrabotke [Justification of the minimum resistance of the support in the mining]. Sbornik nauchnykh trudov GOU VPO LNR "DonGTU", № 6 (49), P. 15–25.

40. Litvinskii G.G., 2020. Razmery i konfiguratsiya zony zapredel'nykh deformatsii vokrug vyrabotki [Size and configuration of the zone of extreme deformations around the mine]. Sbornik nauchnykh trudov GOU VO LNR "DonGTU", № 20 (63), P. 5–17.

41. Litvinskii G.G., 2023. Osnovnye rezhimy raboty i geomekhanicheskie para-metry vzaimodeistviya krep'i s gornym massivom [The main modes of operation and geomechanical parameters of the support interaction with the mountain range]. Naukoemkie tekhnologii i oborudovanie v promyshlennosti i stroitel'stve, № 1 (75), P. 5–15.

42. Litvinskii G.G., 2008. Analiticheskaya teoriya prochnosti gorn'nykh porod i massivov [Analytical theory of the strength of rocks and massifs]. Donetsk: Nord-Press, – 207 p.
43. Litvinskii G.G., 2019. Razvitie edinoi teorii prochnosti i zakonomernosti razrusheniya [Development of a unified theory of strength and uniformity of fracture]. Sbornik nauchnykh trudov GOU VPO LNR "DonGTU", № 13 (56), P. 5–18.
44. Shashenko A.N., Solodyankin A.V., Smirnov A.V., 2015. Puchenie porod pochvy v vyrabotkakh ugol'nykh shakht [Heaving of soil rocks in the workings of coal mines]. Dnepropetrovsk: TOV "Lizunov-Pres", 256 p.